Technische Universität Dresden
Fakultät Mathematik
Institut für Analysis

# Lineare Funktionen im Kontext des Selbstlernens: Entwicklung differenzierter Materialien unter Berücksichtigung digitaler Möglichkeiten

Wissenschaftliche Arbeit im Fach: Fachdidaktik Mathematik

Lehramt an Oberschulen

eingereicht von

**Luis Schlesier**

geboren am 24.09.1997

Gutachterinnen:

Prof. Dr. Andrea Hoffkamp

Dr. paed. Petra Woithe

Dresden, Mai 2021

# Inhaltsverzeichnis

# Abbildungsverzeichnis

# 1 Einleitung

Seit mehr als einem Jahr wird der Alltag unzähliger Menschen auf der ganzen Welt maßgeblich durch das Coronavirus Sars-CoV-2 bestimmt. Einzelhandelsgeschäfte, Restaurants, Hotels und kulturelle Einrichtungen unterliegen seit Beginn der Pandemie erheblichen Einschränkungen, die zuletzt zu mehrmonatigen Schließungen der genannten Dienstleistungsbetriebe führten. Es wurden Ausgangssperren und Kontaktbeschränkungen verhängt, die regional noch immer bestehen, sodass das öffentliche und private Leben in Deutschland auf ein Minimum heruntergefahren wurde. Auch die Schulen sind von den Maßnahmen zur Eindämmung der Pandemie betroffen, wodurch sich der Tagesablauf der Kinder grundlegend veränderte. Am 13. März 2020 wurden alle Bildungseinrichtungen erstmals bundesweit für etwa anderthalb Monate geschlossen. Eine zweite Schließung im Primar- und Sekundarbereich folgte am 14. Dezember 2020 (vgl. Jungblut, 2021) und dauerte diesmal sogar bis Ende März 2021 an. Auch zwischen den genannten Zeiträumen fand ein geregelter Schulbetrieb nicht statt. Unter den geltenden Hygieneauflagen ist der Alltag der Lernenden noch immer von einem Wechsel aus Präsenz- und Distanzunterricht geprägt. In welcher Form das Lehren und Lernen in Zukunft praktiziert werden kann, ist zum jetzigen Zeitpunkt völlig ungewiss. Mit Beginn der Pandemie wurden die Kinder somit vor nie da gewesene Herausforderungen gestellt, wenn es darum geht, die Unterrichtsinhalte angeleitet zu erarbeiten, Aufgabenstellungen selbstständig zu lösen und den Arbeitsprozess im Homeschooling sinnvoll zu organisieren. Auch der fehlende soziale Kontakt zu Freund*innen stellt eine nicht zu verachtende Belastung der Lernenden dar. Wie die Schüler*innen diese Situation bewältigen, hängt stark von den individuellen Rahmenbedingungen ab. Schließlich besitzen nicht alle Eltern die Kapazität, ihre Kinder bei schulischen und privaten Problemen adäquat zu unterstützen.

„Schulschließungen belasten die Lernenden nicht nur psychisch, sondern haben auch zu Wissens- und Kompetenzdefiziten geführt“ (Sächsisches Staatsministerium für Kultus, 2021), mahnt Sachsens Kultusminister Christian Piwarz vor den Auswirkungen des dauerhaften Fernunterrichts. Zwar werden diese wohl erst in den nächsten Schuljahren durch Lernstandserhebungen offenbart, doch bereits zum gegenwärtigen Zeitpunkt lassen sich die Folgen der aktuellen Bildungssituation abschätzen. Empirische Daten aus anderen Ländern zeigen diesbezüglich allenfalls einen Kompetenzerhalt, aber keinen -zuwachs (vgl.

Braun, 2021). Inwiefern pandemiebedingte Lernverluste in den kommenden Jahren ausgeglichen werden können, ist momentan nicht absehbar. Es ist naheliegend, dass erhebliche Qualitätsunterschiede in der Organisation und Umsetzung des Homeschoolings bestehen. Christian Piwarz vertritt vielmehr die Auffassung, dass „kein noch so guter Distanzunterricht [den] Präsenzunterricht ersetzen [kann]“ (Sächsisches Staatsministerium für Kultus, 2021). Zum einen erfordert ein gelungener Fernunterricht ein durchdachtes Konzept, welches die Abwesenheit der Lehrperson im Lernprozess zumindest annähernd kompensiert. Denn häufig reicht die Präsentation von Tafelbildern und das Erteilen standardisierter Rechenaufgaben nicht aus, um mathematische Begriffe in ihrer gesamten Vielfalt zu vermitteln. Es bedarf geeigneter Angebote, welche den Lernenden einen angemessenen Zugang zur Mathematik ermöglichen sowie Kompetenzen nachhaltig aufbauen. Andererseits erfordern die Aufbereitung und Umsetzung dieser innovativen Unterrichtsideen ein gewisses Maß an digitalem Know-how. Gleichzeitig wird den Lehrenden durch die notwendige Neuausrichtung ihrer Unterrichtsmaterialien ein zeitlicher Mehraufwand abverlangt, der im normalen Schulalltag kaum zu bewältigen ist. An dieser Stelle setzt die vorliegende wissenschaftliche Arbeit an und untersucht, wie Lehr-Lern-Arrangements in Zeiten ausgeprägter Selbstlernphasen erfolgreich aufbereitet werden können. Dazu wurde in Zusammenarbeit mit der Carl-von-Ossietzky-Schule in Berlin eine Materialreihe zum Thema „Lineare Funktionen“ entwickelt, welche die aktuelle Situation aufgreift und die Bedürfnisse der Schüler*innen berücksichtigt. Der ausgeprägten Heterogenität der Kinder wird durch binnendifferenzierte und klar strukturierte Arbeitsmaterialien Rechnung getragen, die einen individualisierten Aneignungsprozess ermöglichen. Ferner wird das Potential digitaler Medien genutzt, um die Lernenden bei der Auseinandersetzung mit funktionalen Zusammenhängen gezielt zu unterstützen und so pandemiebedingten Lernverlusten bestmöglich vorzubeugen.

Die Ausarbeitung betrachtet zunächst die Rahmenbedingungen der Lernenden und untersucht, welche Anforderungen sich hieraus an die zu entwickelnden Selbstlernmaterialien ergeben. Im Anschluss daran wird die historische Entwicklung des Funktionsbegriffs skizziert, die bei der strukturellen Aufbereitung der curricularen Inhalte im Sinne des genetischen Prinzips berücksichtigt werden soll. Unmittelbar damit verbunden ist das Kapitel zur Entwicklung funktionalen Denkens. Es wird aufgezeigt, wie ein kompetenzorientierter Umgang mit Funktionen gefördert werden kann, der sich nicht auf das mathematische Kalkül beschränkt, sondern inhaltliche Vorstellungen aktiviert. Im Rahmen der Materialentwicklung werden zunächst die Lernziele der Unterrichtsreihe festgelegt, bevor der Themenbereich der linearen Funktionen aus didaktisch-methodischer Perspektive beleuchtet wird. Die Ergebnisse der Analysen münden schließlich in einem konkreten Konzept, welches den eigenständigen Lernprozess der Schüler*innen im Homeschooling aktivieren soll.

# 2 Kontext und Ziele

## 2.1 Rahmenbedingungen der Lernenden

Die Carl-von-Ossietzky-Schule (CvO) im Berliner Bezirk Friedrichshain-Kreuzberg ist eine staatliche Europaschule „mit den Mutter- bzw. Partnersprachen Türkisch und Deutsch“ (Senatsverwaltung für Bildung, Jugend und Familie, 2019, S. 4). An der Gemeinschaftsschule lernen rund 1200 Kinder von Klasse 1 bis 13, wobei etwa ein Viertel der Schüler*innen der gymnasialen Oberstufe angehört (vgl. Senatsverwaltung für Bildung, Jugend und Familie, 2019, S. 4). Rund 90 % der Lernenden sind nicht-deutscher Herkunftssprache, sodass in den Klassen erhebliche soziale und kulturelle Unterschiede vorherrschen (vgl. Hoffkamp, 2017a, S. 1). Aufgrund ihrer institutionellen Ausrichtung als Gemeinschaftsschule kann allerdings auch hinsichtlich des Lernverhaltens von stark heterogenen Klassenzusammensetzungen ausgegangen werden. Dies betrifft sowohl die Lernvoraussetzungen als auch das Arbeitsverhalten der Kinder, sodass das Leistungsvermögen insgesamt vom Förderschul- bis hin zum Gymnasialniveau reicht (vgl. Hoffkamp, 2017a, S. 1). Darüber hinaus muss die Lehrperson bei einzelnen Schüler*innen verschiedene Förderschwerpunkte berücksichtigen, wobei die Bereiche geistige Entwicklung, Lernen, Sprache sowie Verhalten überwiegen (vgl. Hoffkamp, 2017b, S. 158).

Sowohl die soziale Vielfalt als auch die Differenzen hinsichtlich des Lernleistungsvermögens wirken sich auf die Rahmenbedingungen der Schüler*innen im Distanzunterricht aus. Während die Lehrperson das Lernen im Präsenzunterricht aktiv steuern kann, müssen die Kinder im Homeschooling auf die unterstützende Funktion des Lehrenden verzichten. Es kann nicht davon ausgegangen werden, dass jeder Lernende im eigenen Haushalt eine angemessene Unterstützung bei der Bewältigung der Schulaufgaben erfährt, wobei die Ursachen dafür vielfältig sind. Viele Kinder sind somit auf sich allein gestellt und benötigen deshalb umso mehr angemessene Hilfestellungen. Des Weiteren sind auch Unterschiede hinsichtlich der technischen Ausstattung der Elternhäuser zu erwarten. Die Ergebnisse einer Umfrage, die unter 526 Eltern deutschlandweit durchgeführt wurde, belegen diese Annahmen. Zwar haben fast alle Schüler*innen einen dauerhaften oder zumindest regelmäßigen Zugang zum Internet, jedoch sind nur rund zwei Drittel der Befragten mit einem Smartphone oder Handy ausgerüstet. Andere digitale Endgeräte wie Tablets (47,1 %), Notebooks (41,2 %) oder PCs (25,4 %) sind deutlich seltener verfügbar. Einen Drucker besitzen knapp 60 %

der Studienteilnehmer*innen. Allerdings sind auch nur etwa 6 % der Befragten ohne technische Mittel ausgestattet (vgl. BearingPoint, 2020, S. 11). Die digitalen Voraussetzungen werden in dieser Umfrage nicht näher präzisiert, sodass unklar ist, ob Schüler*innen, die kein Smartphone besitzen, stattdessen auf einen PC oder andere Geräte zurückgreifen können. Es wird jedoch deutlich, dass ein Drucker keineswegs in jedem Haushalt verfügbar ist, was bei der Entwicklung der Materialien berücksichtigt werden muss. Gleichwohl sind die unterschiedlichen technologischen Rahmenbedingungen nicht die einzigen Hürden, mit denen die Lernenden im Homeschooling konfrontiert werden. Die technische Ausstattung der Schüler*innen korreliert nur bedingt mit einem sinnstiftenden Medienumgang. Die Schulinspektion bescheinigte der Carl-von-Ossietzky-Schule eine ausbaufähige digitale Ausstattung, sodass ein umfangreicher Medieneinsatz und eine damit verbundene Medienerziehung im Präsenzunterricht nur bedingt stattgefunden hat (vgl. Senatsverwaltung für Bildung, Jugend und Familie, 2019, S. 8). Demzufolge ist auch im Distanzunterricht davon auszugehen, dass die Lernenden ganz unterschiedlich mit den verfügbaren Endgeräten umzugehen wissen.

Die eingangs beschriebenen Unterschiede in der Arbeitsweise setzen sich auch im häuslichen Umfeld fort. Während einige Lernende sehr selbstständig mit den erteilten Arbeitsaufträgen zurechtkommen werden, sind Leistungsschwächere womöglich mit der Situation überfordert, die Unterrichtsinhalte eigenverantwortlich zu erarbeiten. Die Gegensätze, die im Präsenzunterricht in puncto Arbeitsverhalten, Arbeitstempo und Lernvoraussetzung sichtbar waren, sind auch im Distanzunterricht zu bedenken. Dies erfordert ein angemessenes Lernangebot, welches die Heterogenität der Lernenden gleichermaßen berücksichtigt wie die individuellen Voraussetzungen des Elternhauses. Die Anforderungen an die zu entwickelnde Materialreihe, welche sich aus den vorgestellten Rahmenbedingungen ergeben, werden im folgenden Kapitel analysiert.

## 2.2 Anforderungen an das Material

Die Situation, in der sowohl Lehrende als auch Lernende die Schule nicht oder lediglich sporadisch besuchen dürfen, ist für alle Beteiligten absolutes Neuland. Während einzelne krankheitsbedingte Unterrichtsfehltage in der Regel ohne größere Schwierigkeiten dadurch kompensiert werden können, dass sich die betroffenen Schüler*innen individuell mit den jeweiligen Tafelbildern, Arbeitsblättern und Lernaufträgen auseinandersetzen, erfordern längere Phasen des Homeschoolings gezielte Konzepte. Das Versenden von digitalisierten Materialien, wie sie sonst im Präsenzunterricht genutzt werden, ist schlicht nicht ausreichend, um die Kompetenzentwicklung aller Kinder nachhaltig zu fördern (vgl. Bruder, 2020). Vielmehr ergeben sich unter Berücksichtigung der Rahmenbedingungen, welche im vorherigen Abschnitt analysiert wurden, umfangreiche Kriterien an die zu erstellenden Materialien. Diesbezüglich ist anzumerken, dass einige Punkte auch im Präsenzunterricht einbezogen werden müssen. Im Homeschooling besteht jedoch eine ungleich höhere Gefahr, dass Lernende durch die Missachtung dieser Qualitätsanforderungen im Lernprozess abgehängt werden.

Die Rahmenbedingungen der Kinder im Homeschooling sind divers und dennoch werden die Schüler*innen vor ähnliche Herausforderungen gestellt. Während die Lehrperson im Präsenzunterricht den Unterrichtsgang direkt begleitet und bei auftretenden Problemen unmittelbar als Ansprechpartner*in zur Verfügung steht, sind die Kinder im Fernunterricht zunächst auf sich allein gestellt. Eine adäquate Unterstützung aus dem familiären Umfeld kann nicht in jedem Fall vorausgesetzt werden. Die zu entwickelnde Materialreihe sollte diese Umstände beachten und vielmehr ein Autonomieerleben ermöglichen (vgl. Bruder, 2020). Neben dem Wissensstand müssen hierfür auch die technischen Voraussetzungen der Lernenden berücksichtigt werden. So darf niemand aufgrund fehlender Ressourcen von den Online-Angeboten ausgeschlossen werden. Gleichwohl ist jedem Kind ein angemessener inhaltlicher Zugang zu den Arbeitsaufträgen zu ermöglichen. Im weiteren Verlauf gilt es, potentielle Schwierigkeiten zu antizipieren und Hürden im Bearbeitungsprozess durch die Bereitstellung unterstützender Angebote vorzubeugen. Diese Hilfestellungen sollen bei Bedarf herangezogen werden, sodass jedes Kind sein Arbeitstempo bei der Absolvierung der Aufträge selbst bestimmen kann. Entsprechend sollte auch der Aufgabenumfang den neuen Lernbedingungen sowie den individuellen Arbeitsweisen der Schüler*innen angepasst sein, um den zeitlichen Rahmen nicht zu überschreiten. Es gilt, das digitale Unterrichtsgeschehen für die Lernenden bestmöglich zu individualisieren.

Autonomes Lernen erfordert darüber hinaus inhaltlich strukturierte sowie übersichtlich aufbereitete Aufgabenstellungen (vgl. Bruder, 2020). Diese sollten verständlich formuliert und für alle Teilnehmer*innen lösbar sein. In Bezug auf angestrebte Lernziele sollte für die

Schüler*innen eine hohe Transparenz erkennbar sein, um die Erwartungshaltung der Lehrkraft nachvollziehen und dadurch Verantwortung für den eigenen Lernprozess übernehmen zu können (vgl. Bruder, 2020). Optionale Hilfestellungen über verschiedene Kommunikationskanäle sind besonders für leistungsschwächere Schüler*innen unabdingbar, um ihnen selbstständige Arbeitsphasen unter Anleitung zu ermöglichen. Unter Berücksichtigung der technischen Voraussetzungen bieten digitale Lernumgebungen eine attraktive Möglichkeit der Strukturierung der Unterrichtsinhalte.

Ferner spricht Bruder von einem Kompetenzerleben, welches durch digitale Lernangebote erzielt werden soll (vgl. Bruder, 2020). Dies erfordert die Konzeption von Aufgabenstellungen, welche die Lernenden zu hoher kognitiver Aktivität anregen. Ein unmittelbarer Lebensweltbezug in Form von adäquaten Sachkontexten kann dieses Ziel unterstützen. Denkbar hierfür sind Wahlmöglichkeiten im Übungs- und Anwendungsbereich der angebotenen Materialien. Auch der Einsatz von Lernspielen, beispielsweise in Form von Quiz-Apps oder anderen interaktiven Tools, die den Lernenden eine intensive Auseinandersetzung mit dem Unterrichtsgegenstand ermöglichen, fördert den Kompetenzerwerb nachhaltig (vgl. Bruder, 2020). Die spielerische Aufbereitung der Inhalte kann sich darüber hinaus positiv auf die Motivation der Kinder auswirken (vgl. Voß, 2018, S. 26). Dynamische Geometriesoftware bietet dahingehend die Möglichkeit, funktionale Zusammenhänge zu simulieren und so ein tieferes Verständnis für mathematische Konzepte zu erlangen. Digitale Inhalte sollten jedoch stets eine unterstützende Funktion im Lernprozess erfüllen oder mit konkreten Aufgabenstellungen verknüpft werden.

Eine große Hürde, die mit digitalen Unterrichtsangeboten verbunden ist, besteht im eingeschränkten sozialen Austausch (vgl. Bruder, 2020). Videokonferenzen ermöglichen zwar eine virtuelle Kommunikation, benötigen für eine gelungene Umsetzung jedoch klare Regeln und durchdachte Konzepte sowie eine fortgeschrittene technische Ausstattung der Kinder. Andernfalls besteht die Gefahr, dass Lernende nur passiv am Online-Unterrichtsgeschehen teilnehmen. Lernvideos bieten dahingehend eine alternative Möglichkeit, zumindest indirekt mit den Schüler*innen in Kontakt zu treten und sie bei Bedarf in ihrem Lernprozess zu unterstützen. Durch anleitende Clips soll den Lernenden ein individueller Zugang zu den Aufgabenstellungen gewährt werden. Darüber hinaus stellen Lernumgebungen mit Selbstkontrollmöglichkeiten eine gelungene Abwechslung zum Feedback der Lehrperson dar, die den Kindern sofortige Rückmeldungen über den eigenen Lernfortschritt ermöglichen. In Kombination mit verständlichen und lösbaren Arbeitsaufträgen kann dadurch die Motivation und die Lernbereitschaft der Schüler*innen erhöht werden. Die Rolle der Lehrperson als unmittelbarer Koordinator des Lernprozesses bleibt trotz dieser zusätzlichen Angebote unverändert.

Es wird deutlich, dass die Anforderungen an Arbeitsmaterialien im Rahmen des Homeschoolings vielfältig sind. Trotz der veränderten Ausgangsbedingungen nimmt der/die Lehrende nach wie vor eine zentrale Rolle im Unterrichtsgeschehen ein. Die Lehrperson bleibt als Ansprechpartner*in abrufbar, jedoch wird sie vor allem bei der Vorbereitung der Materialien gefordert, um pandemiebedingten Lernverlusten durch optimale Lehr-Lern-Arrangements vorzubeugen. Erteilte Arbeitsaufträge erfordern diesbezüglich eine gute inhaltliche sowie formale Struktur und müssen hinsichtlich des Anforderungsniveaus an die individuellen Voraussetzungen der Kinder angepasst sein. Der sinnvolle und gezielte Einsatz digitaler Inhalte kann den eigenständigen Lernprozess der Kinder im Homeschooling unterstützen. Trotz der hohen Ansprüche an die Materialreihe obliegt es letztlich dem pädagogischen Ermessen der Lehrperson, inwiefern das Konzept in der jeweiligen Unterrichtsform eingesetzt und um zusätzliche Angebote ergänzt wird.

# 3 Zur historischen Entwicklung des Funktionsbegriffs

Der statisch wirkende Charakter eines mathematischen Begriffs ist in Wirklichkeit das Ergebnis einer historisch-gewachsenen Auseinandersetzung mit dem Objekt sowie einer fortlaufenden Präzisierung bestehender Definitionen. Dieses Kapitel soll dazu beitragen, die heute verbreitete Definition des Funktionsbegriffs als Resultat eines vorangegangenen Entwicklungsprozesses aufzufassen und zu verstehen. Vielmehr ermöglicht ein Unterrichtsaufbau, der nicht nur auf die statische Präsentation der Ergebnisse beschränkt ist, ein angemessenes Bild von Mathematik „als dynamischen Prozeß [sic] der Mathematisierung" (Kronfellner, 1987, S. 86). Im Sinne des historisch-genetischen Prinzips sind hierbei vor allem jene Frage- und Problemstellungen von Interesse, welche eine Veränderung bestehender Begrifflichkeiten erforderlich machten (vgl. Weigand, o. J., S. 4). Ein geschichtlicher Abriss ist in diesem Zusammenhang unabdingbar.

Einen impliziten Funktionsbegriff im erweiterten Sinne verwendeten bereits die Babylonier sowie die antiken Griechen, beispielsweise in Form von Tabellen der Quadrat- und Kubikzahlen (vgl. Müller-Philipp, 1994, S. 7). Auch die folgenden graphischen Darstellungen von Oresme, Galilei, Cavalieri oder Barrow waren eng an eine geometrisch-orientierte Begriffsauffassung gebunden (vgl. Müller-Philipp, 1994, S. 7). Die erstmalige systematische Verwendung des Funktionsbegriffs ist auf das 17. Jahrhundert zurückzuführen und ging mit der Entwicklung der Analysis einher (vgl. Humenberger & Schuppar, 2019, S. 9). Trotz der frühen Beschäftigung mit funktionalen Darstellungen entwickelte sich eine formale Definition recht spät, sodass von einem jungen mathematischen Begriff gesprochen werden kann. Durch eine rechnerische Begriffsauffassung nach Descartes war es möglich, funktionale Abhängigkeiten neben der verbalen Darstellung fortan auch formal wiederzugeben (vgl. Müller-Philipp, 1994, S. 7). Grundlegend hierfür war die Einführung von Variablen, die auf den Arbeiten von Viète beruhen (vgl. Kronfellner, 1998, S. 1).

In zahlreichen Schriften war es der Mathematiker Felix Klein, der im 20. Jahrhundert immer wieder die zentrale Bedeutung des Funktionsbegriffs im Mathematikunterricht betonte (vgl. Vollrath & Weigand, 2007, S. 131). Für ihn ist die erste Definition auf Euler zurückzuführen, der um 1750 gleich zwei Erklärungen des Begriffs darlegte. Er gab an, dass eine Funktion $y$ ein analytischer Ausdruck in $x$ sei und dass ferner $y(x)$ im Koordinatensystem durch eine freihändig gezeichnete Kurve festgelegt werde (vgl. Vollrath & Weigand, 2007,

S. 132). Welche analytischen Ausdrücke zugelassen waren, blieb in diesem Zusammenhang unklar. Auch die Begriffe „Funktion“ und „Funktionswert“ wurden zu dieser Zeit noch synonym verwendet (vgl. Müller-Philipp, 1994, S. 8). Des Weiteren war die Eindeutigkeit der Zuordnung, die heute den Kern des Begriffs bildet, in diesem Ansatz nicht gefordert (vgl. Kronfellner, 1998, S. 1). Der zweite Aspekt Eulers, welcher Funktionen als freihändig gezeichnete Kurven betrachtete, lässt vermuten, dass sich das Hauptaugenmerk zunächst auf stetige Funktionen richtete (vgl. Kronfellner, 1998, S. 2). In der Einschränkung des Definitionsbereichs wurde noch keine Notwendigkeit gesehen (vgl. Kronfellner, 1998, S. 2).

Dies änderte sich, als die beiden Lösungen der Differentialgleichung einer schwingenden Saite von D'Alembert und Bernoulli miteinander verglichen wurden. Die Resultate unterscheiden sich dahingehend, dass Bernoullis Ergebnis jene Stellen der Funktion in die Argumentation einbezieht, die zwar formal eingesetzt werden dürfen, jedoch außerhalb des betrachteten Kontexts liegen (vgl. Kronfellner, 1998, S. 2). Dieses Problem wurde auch von Fourier erkannt, der es als „hinderliche Einengung des Funktionsbegriffs“ (Kronfellner, 1998, S. 2) ansah, alle Werte einsetzen zu dürfen, nur weil ein Ausdruck für diese auch definiert ist. Fouriers Untersuchungen zeigten weiterhin, dass es analytische Ausdrücke im Eulerschen Sinne gibt, welche der geometrischen Funktionsauffassung einer ordentlichen Kurve widersprechen (vgl. Müller-Philipp, 1994, S. 9). Dirichlet entdeckte schließlich, dass mittels eines mehrfachen Grenzübergangs „aus einer stetigen Funktion eine überall unstetige Funktion“ (Müller-Philipp, 1994, S. 9) erzeugt werden kann. Hieraus ergab sich, dass die Eigenschaft der Stetigkeit nicht als selbstverständlich anzunehmen ist. In diesem Zusammenhang wurde der Funktionsbegriff um das Definitionsintervall erweitert und endgültig von seinen Darstellungsformen entkoppelt (vgl. Müller-Philipp, 1994, S. 8). Dies erforderte eine weitere Präzisierung der Definition, welche auf Dirichlet zurückzuführen ist: „Ist in jedem Intervalle jedem einzelnen Werte $x$ durch irgendwelche Mittel ein bestimmter Wert $y$ zugeordnet, dann soll $y$ eine Funktion von $x$ heißen.“ (Vollrath & Weigand, 2007, S. 132).

Die Entwicklung neuer mathematischer Teilgebiete führte zu einer weiteren Verfeinerung des Funktionsbegriffs durch Richard Dedekind: „Unter einer Abbildung $\varphi$ eines Systems $S$ wird ein Gesetz verstanden, nach welchem zu jedem bestimmten Element $s$ von $S$ ein bestimmtes Ding gehört, welches Bild von $s$ heißt und mit $\varphi(s)$ bezeichnet wird.“ (Dedekind, 1911, S. 6, zitiert nach Kronfellner, 1998, S. 4). Erstmals wurde die Beliebigkeit der Definitionsmenge sowie die explizite Unterscheidung der Begriffe „Funktion“ und „Funktionswert“ in einer Definition aufgegriffen, wohingegen der Ausdruck der „Zielmenge“ noch immer nicht unmittelbar erläutert wurde (vgl. Kronfellner, 1998, S. 4). Die Einführung eines eigenen Symbols für die Wertemenge wurde erst Jahre später durch Georg Cantor veranlasst (vgl. Kronfellner, 1998, S. 4). Durch die mengentheoretische Auffassung des Begriffs war es nun möglich, nicht mehr nur Zahlen, sondern vielmehr beliebige Objekte einander zuzuordnen (vgl. Humenberger & Schuppar, 2019, S. 10). Um die in den Definitionen von Dirichlet und Dedekind enthaltenen Begriffe wie „Gesetz“ oder „Vorschrift“ zu umgehen, wurde letztlich die Dedekindsche Abbildungslehre Ende des 19. Jahrhunderts in die Relationentheorie integriert (vgl. Müller-Philipp, 1994, S. 10). Die Auffassung einer Funktion als rechtseindeutige Relation ist auf Peirce und Schröder zurückzuführen (vgl. Vollrath & Weigand, 2007, S. 132) und ermöglichte fortan eine Verfeinerung des Zuordnungsbegriffs, indem „Relationen als Teilmengen $G \subseteq A \times B$ bzw. als Tripel $(A, B, G)$“ (Müller-Philipp, 1994, S. 10) betrachtet werden.

Die Ausführungen skizzieren zentrale Problemstellungen, welche in der Vergangenheit ausschlaggebend für die Veränderung bestehender Definitionen waren. Die Tatsache, dass sich der Funktionsbegriff erst entwickelte und somit nicht per se in seiner Vollständigkeit und Komplexität gegeben war, ist elementar und ermöglicht wichtige Schlüsse für die schulische Behandlung. Schließlich ergibt sich die komplette Tragfähigkeit funktionaler Zusammenhänge für die Lernenden meist erst in der Sekundarstufe II (vgl. Vollrath & Weigand, 2007, S. 131). Vielmehr wird durch den Aufbau adäquater Vorstellungen und Aspekte zum Funktionsbegriff die Grundlage für eine mit Inhalten gefüllte Definition im Sinne des genetischen Prinzips geschaffen (vgl. Weigand, o. J., S. 5).

# 4 Entwicklung funktionalen Denkens

In den Ausführungen zur historischen Entwicklung des Funktionsbegriffs wurde deutlich, dass die heutzutage verwendete Definition das Resultat einer fortlaufenden Präzisierung darstellt. Diese Verfeinerung führte erst zu der Fülle an Aspekten, die mittlerweile fest mit dem mathematischen Objekt der Funktion verbunden sind. Funktionale Zusammenhänge gewannen somit auch in der Didaktik zunehmend an Bedeutung. In diesem Kontext wird untersucht, was unter funktionalem Denken verstanden wird und welche Konsequenzen sich daraus für den Unterricht ergeben.

Aufgrund des breiten Anwendungsbereiches sind funktionale Zusammenhänge inzwischen aus den Lehrplänen der weiterführenden Schulen nicht mehr wegzudenken. Zurückzuführen ist dies auf die „Meraner Reform aus dem Jahre 1905 mit ihrem Plädoyer zur ‚Erziehung zum funktionalen Denken'" (Rolfes, 2018, S. 1). Zwar enthielt bereits der Mathematiklehrplan aus dem Jahr 1901 auf Anraten der Mathematiker Klein und Hauck erste Ansätze zur Funktionsbehandlung in der Schule. Diese beschränkten sich jedoch ausschließlich auf die frühere Einführung des Begriffes, wohingegen die Meraner Beschlüsse eine Vernetzung verschiedener Bereiche des Mathematikunterrichts anstrebten (vgl. Müller-Philipp, 1994, S. 11). In diesem Kontext wurde erstmals von der Leitidee des funktionalen Denkens gesprochen. Das Ziel war es, dass der Funktionsbegriff „den ganzen mathematischen Unterricht der höheren Schulen wie ein Ferment durchdringe" (Klein, 1924, S. 221). Da sich erste Unterrichtsvorschläge jedoch auf inhaltliche Betrachtungen sowie eine überaus generalisierte Denkweise im Sinne des logischen Denkens und der Raumanschauung beschränkten, wurde die Leitidee in den 1960er Jahren zunehmend kritisch beäugt (vgl. Vollrath, 1989, S. 1–2).

In seinem 1989 erschienen Artikel greift Vollrath den Begriff des funktionalen Denkens wieder auf und betont dessen uneingeschränkte Berechtigung im Mathematikunterricht (vgl. Vollrath, 1989, S. 4). Wird in den folgenden Ausführungen regelmäßig auf Vollrath verwiesen, dann weil zahlreiche weitere Untersuchungen zum funktionalen Denken unmittelbar an seine fundamentalen Analysen anknüpfen (vgl. Rolfes, 2018, S. 9). Er definiert funktionales Denken dabei als „eine Denkweise, die typisch für den Umgang mit Funktionen ist" (Vollrath, 1989, S. 5) und bezieht sich auf Oehl, der folgenden Ansatz prägte: „Wird diese durch eine Funktion bestimmte und darstellbare Abhängigkeit (funktionale Abhängigkeit) bewusst erfasst und bei der Lösung nutzbar gemacht, so spricht man von funktionalem Denken.“ (Oehl, 1965, S. 244). Beide Definitionen sind eng an den methodologischen Aspekt gekoppelt und unmittelbar mit dem Funktionsbegriff verbunden. In Vollraths Ausführungen wird deutlich, dass eine Denkweise nur dann didaktisch sinnvoll beschrieben werden kann, wenn sie verschiedene Perspektiven und Entwicklungen einbezieht, weshalb er eine offene didaktische Begriffsauffassung verwendet (vgl. Vollrath, 1989, S. 5). Bei einem Versuch das „Gemeinsame der Fragestellungen, Methoden und Objekte“ (Vollrath, 1989, S. 4) eines Bereichs zu beschreiben und von anderen Gebieten abzugrenzen, spricht er von einer *charakterisierenden* Sicht. Die Frage nach Intuitionen und Phänomenen, welche die Entwicklung des Gebiets vorangetrieben haben, bezeichnet er als *phänomenologischen* Blickwinkel (vgl. Vollrath, 1989, S. 4–5). Das Charakteristische im Umgang mit Funktionen drückt sich in drei Grundvorstellungen aus, welche in Kapitel 5.2.2 dieser Arbeit intensiver aufgegriffen werden. Mögliche Phänomene und intuitive Zugänge werden in Abschnitt 5.2.4 thematisiert.

Wenn also nicht nur ein kalkülhaftes Verständnis für Funktionen, sondern vielmehr ein bestimmter gedanklicher Umgang entwickelt werden soll, stellt sich die Frage nach notwendigen Kompetenzen, die es zu fördern gilt. Neben der Qualifikation, Zusammenhänge zwischen Größen festzustellen, anzugeben, anzunehmen und zu erzeugen, gilt es, die Lernenden zur Bildung und anschließenden Kontrolle von „Hypothesen über die Art des Zusammenhangs und über den Einfluss von Änderungen“ zu befähigen (vgl. Vollrath & Weigand, 2007, S. 140). Es wird deutlich, dass funktionales Denken mehr umfasst als das Definieren des Funktionsbegriffs sowie das Kennen von Beispielen und Gegenbeispielen. Vielmehr geht es um eine angemessene Berücksichtigung der Grundvorstellungen, die jeweils unterschiedliche Aspekte funktionaler Zusammenhänge aufgreifen. Dies bedeutet, dass der statische Charakter der Relation gleichermaßen berücksichtigt werden muss wie das dynamische Wesen, denn funktionales Denken ist kinematisch (vgl. Vollrath, 1989, S. 13). Für Leuders und Prediger liegt der Schwerpunkt vielmehr darauf, die Schüler*innen „zu befähigen, in unterschiedlichen Situationen Zusammenhänge funktional zu erfassen, mit informellen und auch formaleren Mitteln zu beschreiben, und mit Hilfe dieser Mittel Probleme zu lösen“ (T. Leuders & Prediger, 2005, S. 3). Im Einklang damit stehen Büchters Zielsetzungen für einen allgemeinbildenden Unterricht. Er fordert „funktionale Zusammenhänge innerhalb und außerhalb der Mathematik zu identifizieren und diese Zusammenhänge – wo es sinnvoll ist – mathematisch mit Funktionen zu beschreiben, um sie weiter analysieren zu können“ (Büchter, 2008, S. 4). Notwendig dafür ist neben dem Aufbau der drei Grundvorstellungen, die Kenntnis verschiedener Darstellungsformen und „die Kompetenz, zwischen ihnen hin und her zu wechseln“ (T. Leuders & Prediger, 2005, S. 3). Je nach Aufgabenstellung eignen sich unterschiedliche Ausdrucksmittel zur Problemlösung, sodass die zugehörigen Darstellungswechsel weitere mathematische Fähigkeiten abverlangen (vgl. T. Leuders & Prediger, 2005, S. 3). In Abschnitt 5.2.3 dieser Arbeit erfolgt eine ausführliche Charakterisierung wichtiger Ausdrucksformen.

Nach den einleitenden Ausführungen zum Begriff des funktionalen Denkens, soll abschließend erläutert werden, wie die kognitive Auseinandersetzung mit Funktionen bei den Lernenden konkret gefördert werden sollte. Ferner ist von Interesse, wie ein entsprechender Lernprozess erfolgreich gestaltet und ein flexibler Umgang mit funktionalen Zusammenhängen ermöglicht werden kann. Da es sich um eine Denkweise handelt, die es aufzubauen gilt, sprechen Vollrath und Weigand in diesem Kontext auch von der *Entwicklung* funktionalen Denkens (vgl. Vollrath & Weigand, 2007, S. 140). Eine ähnliche Auffassung wird im Schulkontext bei einem Blick in die Bildungsstandards des Fachs Mathematik deutlich. Insgesamt fünf mathematische Leitideen – unter anderem die Idee „Funktionaler Zusammenhang“ – sind dort verankert. Jeder Grundgedanke soll die Inhalte verschiedener Teilgebiete vereinen und das mathematische Curriculum spiralförmig durchdringen (vgl. Kultusministerkonferenz, 2004, S. 9). In den Bildungsstandards wird mit dem *Spiralprinzip* somit bereits ein didaktisches Konzept aufgegriffen, welches bei Unterrichtung zu berücksichtigen ist. Zurückzuführen ist dies auf Bruner, der die Auffassung vertritt, dass „jedem Kind […] auf jeder Entwicklungsstufe jeder Lehrgegenstand in einer intellektuell ehrlichen Form erfolgreich gelehrt werden [kann]“ (Bruner, 1970, S. 35). Die Quintessenz für ihn besteht darin, den Unterrichtsprozess an fundamentalen Ideen zu orientieren. Dadurch wird es möglich, die Lerninhalte dem Alter und Wissensstand der Schüler*innen angemessen aufzugreifen und in der Folge um neue Aspekte zu erweitern (vgl. Bruner, 1970, S. 14). Vollrath und Weigand greifen das Spiralprinzip auf und sprechen von einem *Lernen* des Funktionsbegriffs *durch Erweiterung* (vgl. Vollrath & Weigand, 2007, S. 160), wobei sie ihre Ausführungen konkret auf die Übergänge zwischen den einzelnen Funktionstypen beziehen. Besonders in einer stark heterogenen Lerngruppe sind differenzierende Maßnahmen zur Umsetzung dieser Leitidee unerlässlich.

Wenn die Inhalte nun im Sinne eines Spiralcurriculums aufbereitet werden, sind damit einhergehende didaktische Überlegungen mit dem genetischen Prinzip zu verknüpfen. Das Ziel ist es, das Vorwissen der Lernenden zu aktivieren und zunächst eine informelle Einführung zentraler Begriffe zu erlauben (vgl. Kronfellner, 1998, S. 8). Die Vermittlung funktionaler Zusammenhänge orientiert sich dabei an der historisch-gewachsenen Auseinandersetzung mit dem Begriff, sodass konkrete Problem- und Fragestellungen die Grundlage für weitere Untersuchungen bilden. Mathematik wird dadurch als Prozess der Mathematisierung und nicht als Präsentation fertiger und scheinbar willkürlich-definierter Objekte vermittelt (vgl. Kronfellner, 1998, S. 8). Kronfellner schlägt dahingehend folgendes indirekt-genetisches[1] Unterrichtskonzept zum Funktionsbegriff vor: Zunächst sollten Schüler*innen Erfahrungen mit verschiedenen Formeln und deren Veranschaulichungen sammeln und „so ein ‚Gefühl' für Abhängigkeiten zwischen Größen entwickel[n]" (Kronfellner, 1998, S. 9). Darunter versteht er die Erfassung von Gemeinsamkeiten, Unterschieden und das inhaltliche Verstehen des Monotonieverhaltens sowie der Besonderheiten des Funktionsgraphen (vgl. Kronfellner, 1998, S. 9). Erst im Anschluss wird eine erste explizite Definition erarbeitet und schrittweise um weitere Aspekte ergänzt. Damit fordern sowohl Bruner als auch Kronfellner einen sukzessiven Kompetenz- und Wissenserwerb sowie die „Überwindung unnötiger Strenge und Formalität zugunsten eines lebendigen, an realen Problemen orientierten Mathematikunterrichts" (Müller-Philipp, 1994, S. 21). Eine langfristige Planung des Themenbereichs ist hierfür zwingend erforderlich. Leuders und Prediger mahnen in diesem Kontext ebenfalls vor einer zu frühen Einführung der Termschreibweise (vgl. T. Leuders & Prediger, 2005, S. 6). Wichtige Fähigkeiten des Lesens und Interpretierens sowie des Modellierens funktionaler Zusammenhänge würden darunter leiden. Ebenso sei es kontraproduktiv, nur elementar algebraisch beschreibbare Funktionen im Unterricht aufzugreifen (vgl. T. Leuders & Prediger, 2005, S. 6). Stattdessen können zunächst funktionale Abhängigkeiten betrachtet werden, die nicht explizit durch einen Term darstellbar sind.

[1] Der Terminus indirekt wird deshalb verwendet, weil nicht jeder historische Abschnitt bis ins Detail im Unterrichtsgeschehen aufgearbeitet wird.

Dies findet sich auch in der Idee Vollraths und Weigands wieder, das *Lernen in Stufen* zu organisieren (vgl. Vollrath & Weigand, 2007, S. 160–162):

1. **Stufe**: Der Begriff als Phänomen
2. **Stufe**: Der Begriff als Träger von Eigenschaften
3. **Stufe**: Der Begriff als Teil eines Begriffsnetzes
4. **Stufe**: Der Begriff als Objekt zum Operieren

In den einzelnen Etappen beschreiben Vollrath und Weigand die Fähigkeiten, welche es bei den Schüler*innen zu entwickeln gilt. Die Ausführungen streben zunächst ein intuitives Begriffsverständnis an. Eine zentrale Rolle spielen dafür das Erkennen der Zusammenhänge zwischen Größen sowie die Kenntnis der Darstellungsformen und deren Bedeutung für einfache Problemlösungen. An dieser Stelle wird lediglich der Aspekt der Eindeutigkeit der Zuordnung als Merkmal fokussiert, das es zu erfahren gilt (vgl. Vollrath & Weigand, 2007, S. 160–161). Die zweite Stufe zielt auf den Aufbau eines inhaltlichen Begriffsverständnisses ab, welches die Eigenschaften funktionaler Zusammenhänge stärker in den Fokus rückt. Eine erste Definition wird dagegen erst in der dritten Stufe gefordert (vgl. Vollrath & Weigand, 2007, S. 161), welche jedoch den Umfang dieser wissenschaftlichen Arbeit überschreitet. Das Stufenmodell untermauert vielmehr den Ansatz, „strengen mathematischen Überlegungen eine propädeutische Phase vorzuschalten“ (Vollrath & Weigand, 2007, S. 160) und funktionale Relationen zunächst anschaulich und inhaltlich erfahrbar zu vermitteln. Dies gelingt durch einen direkten Bezug zur Lebenswelt sowie durch die Betrachtung unterschiedlicher qualitativer Abhängigkeitsbeziehungen (vgl. T. Leuders & Prediger, 2005, S. 7). Der Einsatz einer dynamischen Geometriesoftware kann an dieser Stelle sinnstiftend sein, wenn der Zusammenhang zwischen der Situation und der graphischen Darstellung unmittelbar offenbart wird. In Kapitel 5.3.2 werden diesbezüglich Chancen und Potenziale thematisiert.

Zusammenfassend verdeutlichen die Ausführungen, dass funktionales Denken weit mehr umfasst als die Wiedergabe einer Definition, das Kennen ausgewählter Funktionsklassen sowie die Verwendung kalkülhafter Werkzeuge. Stattdessen gilt es, die Lernenden zu befähigen, funktionale Zusammenhänge zu erfassen, zu beschreiben, zu analysieren und zu erzeugen. Ein Unterrichtskonzept, welches mit einer exakten Definition in den Lernbereich einsteigt, stellt nicht nur die Geschichte auf den Kopf, sondern gefährdet womöglich auch das inhaltliche Verständnis der zugrunde liegenden Abhängigkeiten. Für die Lehrkraft gilt es, die Inhalte strukturiert aufzubereiten und zunächst ein intuitives Begriffsverständnis aufzubauen. Dies gelingt, indem Funktionen über alltägliche Zusammenhänge erfahren und durch die Aktivierung notwendiger Vorkenntnisse aufgegriffen werden. Es ist hierzu nicht zwingend erforderlich, mit dem Spezialfall einer proportionalen[2] oder linearen Funktion einzusteigen. Vielmehr können allgemeinere Abhängigkeitsbeziehungen vorgeschaltet werden, um die elementaren Kompetenzen des Lesens, Auswertens und Planens im Zuge einer inhaltlichen Begriffsauffassung zu fördern. Die Einführung der Termschreibweise ist somit ohnehin erst sinnvoll, wenn ein sicheres, qualitatives Verständnis für funktionale Zusammenhänge erarbeitet wurde. Entsprechende Darstellungswechsel sind durch sinnstiftende Problemstellungen anzuregen, weshalb das gesamte Themengebiet einen unmittelbaren Bezug zu realen Sachkontexten aufweisen sollte.

[2] Die Begriffe „proportional“ und „direkt proportional“ werden hier synonym verwendet.

# 5 Materialentwicklung zum Thema „Lineare Funktionen“

## 5.1 Lernziele

Die im Rahmen dieser wissenschaftlichen Arbeit entwickelten Materialien gliedern sich in einführende funktionale Zusammenhänge, proportionale Zuordnungen und lineare Funktionen. Die zugehörigen Lernziele werden ebenfalls abschnittsweise formuliert und in Grob- und Feinziele unterteilt. Die Zielformulierungen sind als Minimalziele ausgelegt und orientieren sich vorwiegend an lernschwächeren Kindern. Eine Differenzierung kann durch vertiefende Aufgaben, die Reduzierung sprachlicher und mathematischer Strukturierungshilfen und den Einsatz von Dezimalzahlen innerhalb der nachfolgenden Lernziele erreicht werden. Zusätzliche Inhalte werden nur im Rahmen der Zielstellungen aufgegriffen. Einzelne Grobziele erstrecken sich zudem über mehrere Arbeitsblätter, sodass die nachfolgenden Formulierungen zwar eine Vorstrukturierung der Unterrichtsinhalte erlauben, jedoch nicht als starre Reihenfolge zu verstehen sind. Darüber hinaus ist anzumerken, dass die folgenden Lernziele lediglich die Elemente des Lernbereichs einschließen, die durch die konzipierte Materialreihe erreicht werden können. Die vollständige Unterrichtung linearer Funktionen erfordert darüber hinaus die explizite Einführung der Begriffe Argument, Funktionswert, Definitions- und Wertebereich, die Ermittlung von Nullstellen sowie die Betrachtung linearer Gleichungssysteme (vgl. Sächsisches Staatsministerium für Kultus, 2019a, S. 43).

**a) Einführung funktionaler Zusammenhänge**

*Grobziel*: Die Lernenden erfahren und interpretieren Alltagssituationen unter dem Fokus funktionaler Zusammenhänge.

*Feinziele:*

- Die Lernenden beschreiben graphische Darstellungen funktionaler Zusammenhänge.
- Die Lernenden erläutern den qualitativen Zusammenhang zwischen dem Monotonieverhalten graphischer Darstellungen und dessen Bedeutung im Sachkontext.
- Die Lernenden interpretieren graphische Darstellungen unter Verwendung sprachlicher Hilfestellungen.
- Die Lernenden ordnen verschiedenen Funktionsgraphen die passende Sachsituation zu.

### b) Proportionale Zuordnungen

*Grobziel*: Die Lernenden entdecken den Proportionalitätsfaktor in verschiedenen Darstellungsformen.

*Feinziele:*

- Die Lernenden berechnen Funktionswerte unter Verwendung des Proportionalitätsfaktors.
- Die Lernenden erkennen in tabellarischen Darstellungen, dass eine Erhöhung der Argumente um eins, eine Erhöhung der Funktionswerte um den Proportionalitätsfaktor zur Folge hat (Linearitätsbedingung).
- Die Lernenden interpretieren den Proportionalitätsfaktor sprachlich.

*Grobziel*: Die Lernenden erfahren und interpretieren den Proportionalitätsfaktor als Anstieg der Geraden.

*Feinziele:*

- Die Lernenden zeichnen Anstiegsdreiecke im Graphen einer proportionalen Funktion ein und beschreiben diese.
- Die Lernenden beschreiben, wie die Änderung des Proportionalitätsfaktors den Anstieg der Geraden beeinflusst.
- Die Lernenden geben die allgemeine Funktionsgleichung proportionaler Zuordnungen an.

*Grobziel*: Die Lernenden nutzen den Anstieg für Übersetzungsprozesse zwischen der Funktionsgleichung und der graphischen Darstellung.

*Feinziele:*

- Die Lernenden ordnen Funktionsgleichungen proportionaler Funktionen ihren Graphen zu.
- Die Lernenden bestimmen die Funktionsgleichung proportionaler Zuordnungen aus graphischen Darstellungen unter Zuhilfenahme geeigneter Anstiegsdreiecke.

### c) Lineare Funktionen

*Grobziel*: Die Lernenden zeichnen graphische Darstellungen linearer Funktionen.

*Feinziele:*

- Die Lernenden stellen Wertepaare in einem Koordinatensystem dar und verbinden diese zu einer Geraden.
- Die Lernenden beschreiben, wie der Graph einer linearen Funktion aus dem Graphen mit der Gleichung $f(x) = m \cdot x$ hervorgeht.
- Die Lernenden beschreiben die Schrittfolge zum Zeichnen einer linearen Funktion unter Verwendung eines geeigneten Anstiegsdreiecks und Verschiebungspfeils.
- Die Lernenden zeichnen den Graphen einer linearen Funktion unter Verwendung eines geeigneten Anstiegsdreiecks und Verschiebungspfeils in ein gegebenes Koordinatensystem ein.

*Grobziel*: Die Lernenden bestimmen die Funktionsgleichung linearer Zusammenhänge.

*Feinziele:*

- Die Lernenden geben die allgemeine Funktionsgleichung linearer Funktionen an.
- Die Lernenden stellen Gleichungen linearer Funktionen aus Sachsituationen auf.
- Die Lernenden bestimmen Anstieg und y-Achsenabschnitt aus graphischen Darstellungen, indem sie geeignete Anstiegsdreiecke einzeichnen und den y-Achsenabschnitt durch einen Pfeil markieren.

*Grobziel*: Die Lernenden erfahren die Bedeutung der Parameter $m$ und $n$.

*Feinziele:*

- Die Lernenden interpretieren die Bedeutung des Anstiegs und des y-Achsenabschnitt in Sachkontexten (beispielsweise: variable Kosten und Grundgebühr).
- Die Lernenden beschreiben den Einfluss der Paramater $m$ und $n$ auf die graphische Darstellung – auch unter Berücksichtigung negativer Vorzeichen.

## 5.2 Didaktische Sachanalyse

Nachdem die Absichten der Materialreihe transparent dargelegt wurden, wird in diesem Kapitel analysiert, welche didaktischen Aspekte bei der Gestaltung eines gelungenen Unterrichtskonzepts zum Thema „Lineare Funktionen" zu berücksichtigen sind. Dies erfordert zunächst eine prägnante fachliche Einordnung des Lerngegenstands, bevor mathematische Grundvorstellungen sowie zentrale Darstellungsarten einschließlich erforderlicher Darstellungswechsel erläutert werden. Ebenfalls von Interesse sind adäquate Zugänge und typische Problemstellungen, die in den einzelnen Arbeitsaufträgen aufgegriffen werden können. Im Zuge dessen wird ermittelt, auf welche Vorkenntnisse sowie Erfahrungen der Lernenden im Unterrichtsprozess aufgebaut werden kann. Nachfolgend wird der Themenkomplex auf potentielle Lernschwierigkeiten untersucht, aus denen sich wichtige Hinweise für die Aufbereitung der curricularen Inhalte ergeben. Um einen individuellen Lernprozess zu forcieren, werden abschließend notwendige Differenzierungs- und Reduktionsschritte vorgestellt.

### 5.2.1 Fachliche Einordnung

Funktionen sind facettenreiche Objekte, die mit der Einführung ihrer linearen Vertreter erstmals explizit in der Sekundarstufe I aufgegriffen werden. Fortan entwickeln sie sich zu einem festen Bestandteil des Mathematikunterrichts und werden schrittweise um andere Funktionstypen ergänzt, was die Untersuchung weiterer Eigenschaften erforderlich macht. Die wiederkehrende Behandlung im schulischen Kontext setzt ein fundiertes Wissen seitens der Lehrkraft sowie dessen strukturierte Aufbereitung voraus. Dieses Kapitel soll die zentralen Lehrinhalte und Kennzeichen linearer Funktionen vom höheren Standpunkt aus untersuchen und damit die Grundlage für sich anschließende didaktische Überlegungen bieten. Aufgrund der zu entwickelnden Materialreihe im Rahmen dieser Arbeit liegt der Fokus im Folgenden auf den linearen Funktionen. Diesen soll sich ausgehend vom allgemeinen Funktionsbegriff deduktiv genähert werden, wenngleich anzumerken ist, dass dieser Zugang nicht für den schulischen Kontext empfohlen wird (vgl. Vollrath & Weigand, 2007, S. 280).

Der Funktionsbegriffs hat in der Vergangenheit eine stetige Präzisierung erfahren und ist inzwischen unmittelbar an den Relationsbegriff geknüpft. Eine mögliche Definition lautet:

„Ordnet eine Vorschrift $f$ jedem $x \in D(f) \subseteq X$ eindeutig ein Element $y = f(x) \in Y$ zu, dann heißt $f$ **Funktion** oder **Abbildung**. Als Schreibweisen verwenden wir $f : X \to Y$ oder […] $f: X \to Y,\ x \mapsto f(x)$. Die Menge $D(f)$ heißt **Definitionsbereich** oder **Definitionsmenge** oder das **Urbild** von $f$, die Menge $W(f) := \{y \in Y\ |y = f(x), x \in D(f)\} \subseteq Y$ ist der **Wertebereich** oder die **Wertemenge** oder das **Bild** von $f$." (Glaubitz, Rademacher & Sonar, 2019, S. 68). Aus der Definition der Wertemenge folgt, dass im Allgemeinen nicht jedes Element von $Y$ als Funktionswert in Erscheinung treten muss. Falls $W(f)$ und $Y$ identisch sind, wird die Funktion zusätzlich surjektiv genannt (vgl. Humenberger & Schuppar, 2019, S. 10). Einen vergleichbaren Terminus verwenden Humenberger und Schuppar (vgl. Humenberger & Schuppar, 2019, S. 10). Mit anderen Worten wird gefordert, dass die betrachtete Relation linkstotal und rechtseindeutig ist (vgl. Roth, o. J., S. 32). Im schulischen Kontext werden die Elemente des Definitionsbereichs als Argumente, die des Wertebereichs als Funktionswerte bezeichnet (vgl. Altrichter, 2017, S. 11; Griesel, Postel & vom Hofe, 2006, S. 49). Sofern die charakterisierende Eigenschaft der Eindeutigkeit gegeben ist, dürfen zwei verschiedene Argumente denselben Funktionswert annehmen. Falls ferner jeder Zielwert einer Funktion höchstens einmal angenommen wird, so nennen wir diese injektiv (vgl. Glaubitz et al., 2019, S. 75). Injektivität und Surjektivität sind Kriterien der Bijektionen, welche eine besondere Art der Abbildungen darstellen und für die Existenz einer Umkehrfunktion von Bedeutung sind (vgl. Glaubitz et al., 2019, S. 78).

Im Mathematikunterricht ist die Betrachtung von Funktionen eng mit der Darstellung im Koordinatensystem verbunden. Als *Graph* der Funktion $f$ wird die Menge der Paare $(x, f(x))$ mit $x \in X$ bezeichnet (vgl. Humenberger & Schuppar, 2019, S. 10). Wird dieser Graph in einem x-y-Koordinatensystem dargestellt, kann das entscheidende Merkmal einer Funktion mithilfe des Vertikallinientests untersucht werden: „Jede vertikale Gerade schneidet den Funktionsgraphen höchstens einmal." (Humenberger & Schuppar, 2019, S. 10). Dies verdeutlicht die Unabhängigkeit der zugrundeliegenden Begriffsdefinition von möglichen Ausdrucksformen. Hier gilt es im Schulalltag anzusetzen, um rechtseindeutige und linkstotale Zuordnungen nicht auf eine Darstellungsart zu beschränken. Ebenso ist die Bezeichnung der Argumente und Funktionswerte mit $x$ und $y$ nicht entscheidend für die Definition. Durch die Zuordnung wird eine Beziehung zwischen den Elementen hergestellt, sodass vielmehr von einer unabhängigen (hier: $x$) und einer abhängigen Variable (hier: $y$)

gesprochen werden sollte (vgl. Humenberger & Schuppar, 2019, S. 12). Je nach Kontext sind alternative Buchstabenbelegungen häufig sogar sinnstiftender.

So einheitlich der Funktionsbegriff im schulischen und höher mathematischen Kontext verwendet wird, so unterschiedlich ist die Auffassung darüber, was unter einer linearen Funktion zu verstehen ist. In der Schulmathematik wird eine Funktion mit einer Funktionsgleichung der Form $y = mx + n$ als linear definiert[3] (Vgl. Altrichter, 2017, S. 19; Griesel et al., 2006, S. 60), wobei hierfür das Aussehen des zugehörigen Graphens in Form einer Geraden ausschlaggebend ist (vgl. Humenberger & Schuppar, 2019, S. 29). Im Sinne der Linearen Algebra der Hochschule hingegen heißt eine Abbildung $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ linear, wenn (vgl. Fischer, 2010, S. 109; Humenberger & Schuppar, 2019, S. 29):

i) $f(x + y) = f(x) + f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$

ii) $f(k \cdot x) = k \cdot f(x)$ für alle $k, x \in \mathbb{R}$

Diese beiden Bedingungen werden von den linearen Funktionen im Sinne der Schulmathematik für $n \neq 0$ offensichtlich nicht erfüllt. Vielmehr spiegelt die dargelegte Definition aus der Linearen Algebra eine Auffassung wider, welche im Unterricht mit einer proportionalen Funktion gleichzusetzen ist. Da die vorliegende Ausarbeitung auf die Entwicklung schulischer Materialien abzielt, wird im Folgenden die Definition einer linearen Funktion als Gerade im Koordinatensystem verwendet, die aus der vorgestellten Funktionsgleichung resultiert.

Bei einer linearen Funktion mit der Funktionsgleichung $y = mx + n$ mit $m, n \in \mathbb{R}$ wird mit $m$ der Anstieg und mit $n$ der y-Achsenabschnitt bezeichnet (vgl. Humenberger & Schuppar, 2019, S. 39). Den Definitionsbereich bildet in der Regel die Menge der reellen Zahlen, den Wertebereich für $m \neq 0$ ebenso. Für $m = 0$ ergibt sich der Wertebereich unmittelbar aus dem y-Achsenabschnitt. Zwar ist eine Interpretation der Bedeutung der beiden Parameter kontextabhängig, allerdings folgt die Zusammensetzung der Funktionsgleichung in jeder Situation einem identischen Muster (vgl. Humenberger & Schuppar, 2019, S. 40):

$$\underbrace{\text{Funktionswert}}_{y} = \underbrace{\text{Änderungsrate}}_{m} \cdot \underbrace{\text{Argument}}_{x} + \underbrace{\text{Anfangswert}}_{n}$$

---

[3] In der Literatur sind für die Parameter $m, n \in \mathbb{R}$ auch andere Buchstabenbelegungen vorzufinden. Aufgrund der folgenden Materialentwicklung wird sich an der Schreibweise der Carl-von-Ossietzky Gesamtschule in Berlin orientiert.

Auf entsprechende Sachsituationen und Problemstellungen, welche die Parameter in einen Sinnzusammenhang stellen, wird in Kapitel 5.2.4 Bezug genommen.

Der Ursprung der Bezeichnungen beider Variablen, die im Schulkontext von enormer Wichtigkeit sind, ergibt sich bei der Betrachtung der graphischen Darstellungen. Der y-Achsenabschnitt $n$ markiert den Funktionswert, an welchem die y-Achse geschnitten wird, während der Anstieg $m$ die Steigung der Geraden bzw. die konstante Änderungsrate widerspiegelt. Für $m > 0$ ist der Graph monoton steigend, für $m < 0$ monoton fallend. Diesbezüglich wird vom positiven bzw. negativen Anstieg sowie von der positiven bzw. negativen Steigung der Geraden gesprochen. Für $m = 0$ ergibt sich der Spezialfall einer konstanten Funktion, welche durch eine horizontale Gerade im Koordinatensystem ersichtlich wird. Weiterhin gilt, dass der Graph einer linearen Zuordnung umso steiler verläuft, je größer der Betrag von $m$ ist (vgl. Humenberger & Schuppar, 2019, S. 41). Bei zwei gegebenen Punkten, welche die Eindeutigkeit einer linearen Funktion garantieren, kann der Anstieg mittels $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ oder spezieller durch $m = f(1) - f(0)$ rechnerisch bestimmt werden (vgl. Scheibke, 2016, S. 22). Weitere Überlegungen bezüglich der Identifikation der Parameter in entsprechenden Darstellungsformen sowie hinsichtlich anzustrebender Darstellungswechsel werden in Kapitel 5.2.3 aufgegriffen.

Neben der Analyse des Monotonieverhaltens sowie der Untersuchung des y-Achsenabschnitts, ist das Angeben und Berechnen von Nullstellen im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I unverzichtbar. Von Interesse sind also jene Argumente, für die $f(x) = 0$ gilt. Für konstante Funktionen ergibt sich daraus (mit einer Ausnahme), dass keine Nullstelle existiert. Für alle anderen linearen Funktionen können die besagten Argumente durch Umstellen der Gleichung $f(x) = mx + n = 0$ nach $x = -\frac{n}{m}$ bestimmt werden (vgl. Scheibke, 2016, S. 21). Da $m = 0$ ausgeschlossen wird, ist die Gleichung lösbar, sodass sogar die eindeutige Existenz einer Nullstelle für jede nicht-konstante lineare Funktion folgt, welche sich graphisch in einem Schnittpunkt zwischen Funktionsgraph und x-Achse zeigt (vgl. Scheibke, 2016, S. 21). Zweifellos ist es möglich, die Nullstelle auch in anderen Darstellungsformen zu identifizieren und dem zugrunde liegenden Kontext gemäß zu verbalisieren.

Die Beziehung zwischen dem algebraischen sowie geometrischen Aspekt kann präzisiert werden: „Der Graph jeder linearen Funktion $f$ mit $f(x) = mx + n$ $(m, n \in \mathbb{R})$ ist eine nicht zur y-Achse parallele Gerade. Und umgekehrt: Jede nicht zur y-Achse parallele Gerade ist

Graph einer solchen linearen Funktion.“ (Humenberger & Schuppar, 2019, S. 41). Auf einen Beweis soll an dieser Stelle verzichtet werden. Vielmehr wird deutlich, dass es sich bei proportionalen und konstanten Abbildungen um Sonderfälle linearer Funktionen handelt. Proportionale Funktionen sind durch die zusätzliche Bedingung $n = 0$ in der Funktionsgleichung bestimmt, weshalb deren zugehörige Gerade durch den Koordinatenursprung verläuft. Zuvor angestellte Überlegungen zu den Eigenschaften sind analog auf die Sonderfälle übertragbar. Anstelle des Anstiegs wird für proportionale Funktionen zunächst häufig der Ausdruck des Proportionalitätsfaktors verwendet (vgl. Humenberger & Schuppar, 2019, S. 46). Zusätzlich gelten für proportionale Zuordnungen die beiden zu Beginn wiedergegebenen Bedingungen i) und ii). Weitere didaktische Untersuchungen, welche für die Aufbereitung und Strukturierung der Inhalte von Bedeutung sind, sollen in den folgenden Unterkapiteln angeführt werden.

### 5.2.2 Grundvorstellungen

In den Ausführungen zur Entwicklung funktionalen Denkens wurde verdeutlicht, dass die Fähigkeit eines adäquaten Umgangs mit Funktionen einen sukzessiven Aufbau erfordert. In diesem Zusammenhang gibt die Wiedergabe einer exakten Definition sowie das Kennen ausgewählter Beispiele und Gegenbeispiele nur bedingt Aufschluss darüber, wie erfolgreich Schüler*innen funktionale Zusammenhänge erkennen, sie verstehen und mit ihnen operieren können. Um sicher mit Funktionen zu arbeiten und das Denken in funktionalen Zusammenhängen zu fördern, sind entsprechende Grundvorstellungen von entscheidender Bedeutung. „Grundvorstellungen repräsentieren abstrakte Begriffe anschaulich und ermöglichen Verbindungen zwischen Mathematik und Anwendungssituationen“ (Roth & Stiller, 2016, S. 4). Im Folgenden werden die drei Aspekte charakterisiert, welche bei der Unterrichtung funktionaler Beziehungen einen zentralen Stellenwert einnehmen.

1) *„Durch Funktionen beschreibt oder stiftet man Zusammenhänge zwischen Größen: einer Größe ist dann eine andere zugeordnet, so daß (sic) die eine Größe als abhängig gesehen wird von der anderen.“* (Vollrath, 1989, S. 7)

Diese Vorstellung betont vor allem die zentrale Eigenschaft der eindeutigen Zuordnung, wie sie in der Definition verankert ist, sodass auch vom *Zuordnungsaspekt* gesprochen wird (vgl. Vollrath, 1989, S. 7). Vollrath sieht an dieser Stelle den entscheidenden Ansatz „für die große Fruchtbarkeit [des Funktionsbegriffs] in der Mathematik und den Anwendungen“ (Vollrath, 1989, S. 7). Im Kontext der linearen Funktionen eignen sich beispielsweise Ware-Preis-Beziehungen sowie Weg-Zeit-Abhängigkeiten mit festen Zeitpunkten, um diese Grundvorstellung zu bedienen. Bei der Darstellung in Tabellen, Graphen oder mittels Termen wird der unmittelbare Zusammenhang zwischen Ausgangs- und zugeordneter Größe in Form von Wertepaaren betrachtet. Auch Pfeildiagramme stellen eine mögliche Veranschaulichung einander zugeordneter Datenpaare dar, wobei sich diese nicht ausschließlich auf Zahlen beschränken müssen.

2) *„Durch Funktionen erfaßt (sic) man, wie Änderungen einer Größe sich auf eine abhängige Größe auswirken.“* (Vollrath, 1989, S. 12)

Der *Kovariationsaspekt* stellt das Änderungsverhalten eines funktionalen Zusammenhangs heraus und ist eng mit „je-desto“-Aussagen verknüpft (vgl. Herget, 2013, S. 49). Erste Grunderfahrungen sammeln die Kinder dahingehend bereits spielerisch. Dass beispielsweise die Turmhöhe von der Anzahl der verwendeten Bausteine abhängt, wird von den jungen Lernenden intuitiv wahrgenommen und als Selbstverständlichkeit aufgefasst. Um herauszufinden, wie sich die Änderung der einen Größe auf die Werte der abhängigen Variable auswirkt, ist es erforderlich, mehrere benachbarte Wertepaare zu vergleichen (vgl. Roth & Stiller, 2016, S. 3). Dadurch wird der dynamische Charakter einer Funktion stärker in den Blickpunkt gerückt als der statische Aspekt einzelner Zuordnungspaare. Bevor das Änderungsverhalten jedoch quantifiziert wird, gilt es, qualitative Aussagen zu Variation und Kovariation anzustellen, welche elementar für eine angemessene Vorstellung funktionaler Zusammenhänge sind (vgl. Laakmann, 2013, S. 84). Kirsch betont im Kontext der Betrachtung systematischer Änderungen vor allem deren Bedeutung für das Aufstellen von Funktionsgleichungen (Kirsch, 1969, zitiert nach: Vollrath, 1989, S.15). Ferner zeigt sich für Vollrath die Ausprägung funktionalen Denkens „auch daran, in welcher Weise Änderungen geplant, durchgeführt, analysiert und zur Lösung von Problemen eingesetzt werden können“ (Vollrath, 1989, S. 16). Die Besonderheit bei linearen Funktionen besteht im Erkennen der gleichmäßigen Veränderung (vgl. Laakmann, 2013, S. 87), die unmittelbar mit dem Parameter des Anstiegs verbunden ist. Dies setzt eine inhaltliche Interpretation der Sachsituation voraus, um angemessene Vorstellungen aufzubauen.

3) *„Mit Funktionen betrachtet man einen gegebenen oder erzeugten Zusammenhang als Ganzes."* (Vollrath, 1989, S. 16)

Der Objektaspekt oder die Sicht als Ganzes (vgl. Roth & Stiller, 2016, S. 3) lenkt den Fokus auf die Menge aller Wertepaare, sodass die Zuordnung als neues, eigenständiges Objekt aufgefasst wird (vgl. Vollrath, 1989, S. 16). Aufgrund dessen handelt es sich hierbei um den anspruchsvollsten der drei Aspekte. Zwar wird diese Grundvorstellung im Funktionsgraphen besonders deutlich (vgl. Vollrath, 1989, S. 17), allerdings können entsprechende Eigenschaften auch in anderen Darstellungsweisen identifiziert werden. Das Ziel durch den Blick auf das Ganze ist es, eine Hilfestellung für Problemlösungen anzubieten sowie Zusammenhänge zu beobachten oder zu erzeugen (vgl. Vollrath, 1989, S. 17). Dieser Aspekt ist deshalb von Bedeutung, da „mathematische Sachverhalte, die zu einem sinnvollen geschlossenen Ganzen gehören und in irgendeiner Weise eine verstehbare Einheit bilden" (Strunz, 1949, S. 35; zitiert nach Vollrath, 1989, S. 16), leichter verinnerlicht werden, als überwiegend zusammenhanglose Informationen. Elementar hierfür ist die Vernetzung verschiedener Darstellungsarten. Besonders der Zusammenhang zwischen der Funktionsgleichung und dem Funktionsgraph ist entscheidend für diese Grundvorstellung. Gelingt es den Schüler*innen, den Anstieg und den y-Achsenabschnitt der Funktionsgleichung in anderen Darstellungen zu identifizieren sowie Veränderungen der Parameter hinsichtlich ihrer Auswirkung zu verstehen, betrachten sie die Funktion als eigenständiges Objekt.

Die aufgezeigten Grundvorstellungen verdeutlichen vielfältige Perspektiven, unter denen (lineare) Funktionen betrachtet werden können (vgl. Humenberger & Schuppar, 2019, S. 23). Es handelt sich jedoch nicht um eine strikte Klassifizierung, denn häufig lassen sich je nach Blickwinkel unterschiedliche Aspekte in ein und derselben Sachsituation sowie Darstellung wiederfinden. Vielmehr verfolgen die vorangegangenen Ausführungen das Ziel, den gedanklichen Umgang mit Funktionen nachzuvollziehen (vgl. Vollrath, 1989, S. 5). Es kann dennoch hilfreich sein, „sich beim Lehren wie beim Lernen dieser unterschiedlichen Aspekte bewusst zu sein" (Herget, 2013, S. 49), um eine entsprechende Aktivierung der Grundvorstellungen im Unterricht anzuregen und dadurch einen flexiblen Umgang mit Funktionen zu fördern.

### 5.2.3 Darstellungsweisen

Funktionale Zusammenhänge können auf verschiedene Weise wiedergegeben werden, wobei die historische Entwicklung verdeutlicht hat, dass eine zunehmende Entkoppelung des Funktionsbegriffs von seinen Darstellungsformen stattgefunden hat. Als Darstellungsarten werden neben der Situationsbeschreibung Tabellen, Graphen und Funktionsgleichungen verwendet. Pfeildiagramme stellen eine weitere Möglichkeit der Visualisierung dar, die im Schulkontext jedoch lediglich eine untergeordnete Rolle einnimmt. Mit Blick auf die möglichen Darstellungsweisen äußert sich die Ausprägung funktionalen Denkens dabei vor allem „an dem Grad der Beherrschung dieser Ausdrucksmittel zum Erfassen und Lösen von Problemen“ (Vollrath, 1989, S. 12). Indem vielfältige Veranschaulichungen kennengelernt, vernetzt und ineinander überführt werden, soll ein inhaltliches Verständnis für funktionale Zusammenhänge aufgebaut werden. Dies erfordert eine Charakterisierung der verschiedenen „Gesichter“ sowie die Betrachtung möglicher Darstellungswechsel (vgl. Abbildung 1).

| nach / von | **Situationen, Bilder, Sprache, ...** | **Tabelle** | **Graph** | **Formel, Gleichung** |
|---|---|---|---|---|
| **Situationen, Bilder, Sprache, ...** | | Messen | Darstellen | Modellieren |
| **Tabelle** | Ablesen, Interpretieren | | Wertepaare im Koordinaten-system | mathematische Muster erkennen |
| **Graph** | Ablesen, Interpretieren | Ablesen | | passende Gleichung finden |
| **Formel, Gleichung** | Formel beschreiben, umsetzen | Rechnen | Graphen skizzieren | |

*Abbildung 1: Darstellungen und Tätigkeiten beim Darstellungswechsel (Herget, 2013, S. 48)*

Lineare Funktionen finden sich in diversen Alltagserfahrungen wieder, sodass oft die Vorgabe einer *Situation* in Form von *Verbalisierungen* oder *Bildern* genügt, um entsprechende Zusammenhänge wiederzugeben und in Tabellen, Graphen oder Funktionsvorschriften zu überführen. Dies setzt voraus, dass eine qualitative Abhängigkeitsbeziehung zweier Größen erfasst wird. Je nach Umfang und Komplexität des Kontextes ist das Anforderungsniveau bei diesen Prozessen unterschiedlich hoch. Das Formalisieren eines außermathematischen Zusammenhangs fördert jedoch das intuitive Verständnis für den Funktionsbegriff. Ein entdeckender Zugang zu diesem komplexen Lernabschnitt, der einen Aufbau adäquater Grundvorstellungen beabsichtigt, gelingt vor allem dann, wenn lineare Funktionen als Modelle bestimmter Phänomene aus der Lebenswelt der Schüler*innen in Erscheinung treten (vgl. Büchter, 2008, S. 4). Experimente oder dynamische Modellierungen helfen dabei, Sachsituationen unter der Perspektive des Funktionsbegriffs aufzufassen und diese zunächst zu beschreiben. Ausgehend von der Verbalisierung können Wertetabellen erstellt und Graphen erzeugt werden, um anschließend ausgewählte Aspekte linearer Funktionen genauer zu inspizieren.

Neben einer gegebenen Sachsituation können Wertepaare in einer waagerechten oder senkrechten *Tabelle* dargestellt werden. Dieses Ausdrucksmittel ist den Schüler*innen bereits aus der Grundschule bekannt (vgl. Jansen, 2008, S. 15) und wird mit der Behandlung proportionaler Zuordnungen weiter vertieft. Je nach Perspektive können sowohl der Zuordnungs- als auch der Kovariationsaspekt fokussiert werden. Denn einerseits verdeutlicht die tabellarische Notation, dass jedem Argument ein passender Funktionswert zugeordnet wird, andererseits kann jedoch auch das Änderungsverhalten der Funktionswerte untereinander analysiert werden. Dies wird bei linearen Funktionen besonders ersichtlich, wenn die Argumente in der Tabelle stets um eine Einheit vergrößert werden. Dann verändern sich die zugeordneten Werte entsprechend um $m$ Einheiten. Haben die Schüler*innen diese Änderung in der Tabelle erfasst, ist die Basis für das Erkennen des Anstiegs $m$ in der zugehörigen graphischen Darstellung geschaffen. Durch analoge Untersuchungen kann die konstante Änderung im Funktionsgraphen mit Hilfe von Anstiegsdreiecken identifiziert werden. Dies verdeutlicht erneut, dass sich die Eigenschaften von Funktionen in unterschiedlichen Darstellungen widerspiegeln. Darüber hinaus fördert diese vernetzende Betrachtung ein tiefergehendes Verständnis für den Begriff des Anstiegs. Im Umgang mit Tabellen sollte somit neben dem dominanten Zuordnungscharakter auch der Kovariationsaspekt berücksichtigt werden. Durch die Fortsetzung erkannter Muster wird das Ausfüllen bestehender Lücken innerhalb einer Tabelle möglich. Erkennen die Schüler*innen in dieser Darstellung den zum Argument $x = 0$ zugehörigen Funktionswert als Achsenabschnitt $n$ oder entdecken sie, dass eine Vergrößerung des x-Wertes um $r \in \mathbb{R}$ eine Veränderung des y-Wertes um $m \cdot r$ zur Folge hat, gelingt ihnen der Blick auf das Ganze (vgl. Laakmann, 2013, S. 88). Für ein inhaltliches Verständnis eignet sich die Verknüpfung mit einer geeigneten Sachsituation, welche durch entsprechende Wertepaare oder das Änderungsverhalten modelliert wird (vgl. Abbildung 1). Für das Aufstellen eines zugehörigen Terms sind graphische sowie rechnerische Zwischenschritte denkbar.

*Graphische Darstellungen* funktionaler Zusammenhänge visualisieren den dynamischen Kovariationsaspekt ebenso wie den Zuordnungscharakter und die Sicht als Ganzes. Grundlegend für das Erfassen der qualitativen Abhängigkeitsbeziehung ist die Beachtung der Achsenbeschriftung. Falls zusätzlich eine Skalierung der Achsen ersichtlich ist, sind die Daten quantifizierbar (vgl. Humenberger & Schuppar, 2019, S. 7). Die Argumente werden auf der waagerechten, die Funktionswerte auf der senkrechten Achse dargestellt. Indem einzelne Wertepaare abgelesen oder in eine Tabelle übertragen werden, findet der Zuordnungsaspekt der Darstellung vordergründige Beachtung. Erst wenn die Menge aller Wertepaare – also die gesamte Gerade – betrachtet wird, kann eine lineare Zunahme identifiziert werden, welche die Variation und Kovariation der Abhängigkeitsbeziehung widerspiegelt. Die konstante Änderungsrate ist „über ein Steigungsdreieck als Quotient aus der Differenz zweier abhängiger Werte und ihrer Argumente“ (Laakmann, 2013, S. 87) exakt berechenbar. Der Anstieg kann jedoch auch unmittelbar am Graphen abgelesen werden, indem ein Einheitsschritt in x-Richtung vollzogen wird. Der zugehörige senkrechte Abstand zur Geraden entspricht gerade dem Anstieg $m$ (vgl. Laakmann, 2013, S. 93). Alternative Steigungsdreiecke sind ähnlich zueinander, sodass das Verhältnis entsprechender Seitenlängen ebenfalls die Änderungsrate $m$ ergibt (vgl. Laakmann, 2013, S. 94). Durch das zusätzliche Ablesen des y-Achsenabschnitts $n$ am Schnittpunkt der senkrechten Koordinatenachse kann die Funktionsvorschrift letztlich in ihrer Gesamtheit aufgestellt werden. Für eine Überführung der graphischen Darstellung in einen Sachkontext ist es erforderlich, Anstieg und Achsenabschnitt geeignet zu interpretieren (vgl. Abbildung 1), wodurch ein inhaltliches Verständnis gleichermaßen abverlangt wie gefördert wird.

Während die tabellarische und die graphische Ausdrucksweise lediglich einen bestimmten Ausschnitt offenbaren, bietet die zugehörige *symbolische Notation* eine umfassendere aber kalkülhafte Perspektive auf funktionale Zusammenhänge. Der Zuordnungsaspekt spiegelt sich in der Schreibweise $x \to f(x)$ wieder, indem die Vorschrift jedem Argument des Definitionsbereichs einen Funktionswert eindeutig zuweist (vgl. Vollrath & Weigand, 2007,

S. 140). Die Gleichung $y = f(x)$ hingegen betont besonders „die Abhängigkeit des $y$ vom $x$" (Vollrath, 1989, S. 12). Der Kovariationsaspekt wird hervorgehoben, wenn die für das Änderungsverhalten verantwortlichen Parameter $m$ und $n$ als solche identifiziert und hinsichtlich ihrer Auswirkung gedeutet werden. Das Erkennen der Termstruktur ermöglicht Rückschlüsse auf den Funktionstyp und somit auf die Zuordnung als Ganzes, sofern die Lernenden diese mit einer konstanten Änderung in Verbindung setzen. Die Verinnerlichung der Variablen $m$ und $n$ als gleichmäßige Veränderung bzw. als Startwert kann den Schüler*innen helfen, die abstrakte Formel mit einem geeigneten Zusammenhang aus der Lebenswelt zu verknüpfen. Das Erzeugen einer Tabelle setzt die kalkülhafte Berechnung einander zugeordneter Wertepaare voraus und kann wiederum als Grundlage für die graphische Darstellung genutzt werden. Alternativ kann der Funktionsgraph unmittelbar nach der Identifikation von Anstieg und Achsenabschnitt mithilfe eines angemessenen Steigungsdreiecks gezeichnet werden. Mit Termen und linearen Gleichungen wurde dahingehend bereits in vorangegangenen Lernbereichen operiert. Die $f(x)$-Schreibweise wird jedoch im Kontext proportionaler Zuordnungen noch nicht verwendet, sodass diese symbolische Variante bei der Betrachtung linearer Funktionen einzuführen ist. Es gilt, diese Notation als eine weitere und in gewissen Situationen zweckmäßigere Darstellungsmöglichkeit in den Unterrichtsprozess zu integrieren. Eine Untersuchung, wie sich eine Änderung der Parameter $m$ und $n$ auf den Funktionsgraphen auswirkt, kann mithilfe einer dynamischen Geometriesoftware angestellt werden.

Die vorangegangenen Betrachtungen haben gezeigt, dass Funktionen auf vielfältige Weise darstellbar sind. Ein inhaltliches Verständnis des komplexen Funktionsbegriffs ist eng an einen flexiblen Umgang mit verschiedenen Repräsentationen geknüpft. Dies setzt das Lesen und Interpretieren von Tabellen, Graphen und Funktionstermen sowie das Modellieren einer Situationsbeschreibung voraus und erfordert die Kompetenz, diese Ausdrucksarten variabel ineinander überführen zu können (vgl. T. Leuders & Prediger, 2005, S. 4). Im Unterrichtskontext gilt es, Aufgaben zu konstruieren, „die eine Darstellungsform als Ausgangspunkt wählen und in verschiedenen Teilaufgaben bestimmte Darstellungswechsel anregen" (Büchter, 2008, S. 9). Zwar ist eine individuelle Präferenz seitens der Schüler*innen für eine oder mehrere Visualisierungen nicht auszuschließen (vgl. Büchter, 2008, S. 7), dennoch soll ein ausgewogener Einsatz aller Darstellungen im Unterricht angestrebt werden. Für eine qualitative Funktionsbehandlung reicht es nicht aus, sich auf die Überführung einer Funktionsvorschrift in eine Wertetabelle zu beschränken, die letztlich im Zeichnen des zugehörigen Funktionsgraphen mündet. Durch vielfältige Lernumgebungen kann es gelingen, den Kindern die Idee der Zweckmäßigkeit der Darstellungswechsel nachvollziehbar zu vermitteln und die Potenziale unterschiedlicher Ausdrucksweisen aufzuzeigen (vgl. T. Leuders & Prediger, 2005, S. 4). Vielmehr können Funktionseigenschaften, die in entsprechenden Veranschaulichungen besonders ersichtlich sind, als Werkzeug zur Problemlösung erfahren werden (vgl. Müller-Philipp, 1994, S. 24). Dadurch soll der Funktionsbegriff mit Inhalten gefüllt und eine Beschränkung auf einzelne Ausdrucksmittel vermieden werden. Die komplexen Anforderungen an die Schüler*innen, die im Zusammenhang mit verschiedenen Darstellungswechseln auftreten, sind vor allem in Bezug auf die Heterogenität der Lerngruppen zu berücksichtigen. Eine unterstützende Funktion bei der Erzeugung und Übersetzung der Darstellungsformen wird dynamischer Geometriesoftware zugewiesen (vgl. Vollrath & Weigand, 2007, S. 147), welche in Kapitel 5.3.2 dieser Arbeit erläutert wird.

### 5.2.4 Zugänge und Problemstellungen

Bereits in den Ausführungen zur Entwicklung funktionalen Denkens wurde verdeutlicht, dass ein intuitiver Zugang zum Funktionsbegriff durch das Aufgreifen adäquater Phänomene ermöglicht wird. Dagegen kann ein strikt deduktiver Aufbau des Themenbereichs, der eine abstrakte Begriffsdefinition an den Anfang stellt, das inhaltliche Verständnis der betrachteten Zusammenhänge hemmen. Vielmehr gilt es, Vorstellungen der Lernenden zu aktivieren und ihre eigenen Erfahrungen in den Lernprozess zu integrieren (vgl. T. Leuders & Prediger, 2005, S. 7). Die Auseinandersetzung mit bestimmten Phänomenen, die durch lineare Funktionen modelliert werden können, trägt nach Vollrath maßgeblich zur Entfaltung des Denkens in Zusammenhängen bei (vgl. Vollrath, 1989, S. 39). Indem funktionale Beziehungen in außermathematischen Anwendungsbereichen identifiziert und verstanden werden, können die jeweils aufgegriffenen Erscheinungen einen Beitrag zur Umwelterschließung liefern (vgl. Vollrath & Weigand, 2007, S. 141).

Das Beschreiben einander abhängiger Größen setzt voraus, dass die zugrunde liegenden Zusammenhänge erkannt und als solche betrachtet werden (vgl. Vollrath & Weigand, 2007, S. 142). Von besonderer Bedeutung sind hierbei Beobachtungen von Vorgängen, die eine zeitliche Entwicklung durchlaufen, da die Zeit als unabhängige Variable kontinuierlich fortläuft (vgl. Vollrath, 1989, S. 19) und in der Realität nicht angehalten werden kann. Der Weg kann hierbei sowohl in Form einer Laufstrecke aber auch als Höhe in Erscheinung treten. Neben Kontexten mit Weg-Zeit-Relationen eignen sich Ware-Preis-Beziehungen sowie die Inspektion geometrischer Abhängigkeiten, denen ein linearer Zusammenhang zugrunde liegt. Untersuchungen der Füllhöhe in Abhängigkeit vom Volumen in unterschiedlichen Gefäßen (vgl. Humenberger & Schuppar, 2019, S. 25) oder die Beziehung zwischen dem Umfang eines Quadrats und seiner Seitenlänge (vgl. Vollrath & Weigand, 2007, S. 142) greifen intuitive Vorstellungen auf und knüpfen an innermathematisches Vorwissen an. Andere geometrische Zusammenhänge können dahingehend als Gegenbeispiele untersucht und zur Sensibilisierung herangezogen werden. Nachdem die Lernenden erkannt haben, dass Änderungen der Ausgangsgröße die Werte der zugeordneten Größe beeinflussen, kann die Kovariation sprachlich konkretisiert, quantifiziert und letztlich formal mithilfe einer Funktionsgleichung ausgedrückt werden (vgl. Vollrath & Weigand, 2007, S. 143). Die Beschreibung linearer Zusammenhänge ist dabei eng mit der Eigenschaft der Monotonie verbunden. Je nach Sachzusammenhang tritt der Anstieg in Form variabler Kosten (Ware-Preis, Stromrechnung) oder Geschwindigkeiten (Weg-Zeit), der y-Achsenabschnitt durch Fixkosten oder Grundpreis bzw. schlicht als Start- oder Anfangswert in Erscheinung (vgl. Humenberger & Schuppar, 2019, S. 40). Gerade zu Beginn der Unterrichtung ist es notwendig, die Bedeutung dieser beiden Parameter in verschiedenen Sachkontexten zu erfahren. Indem untersucht wird, wie sich eine Variation von Anstieg und y-Achsenabschnitt in den verschiedenen Darstellungen zeigt sowie auf den zugrunde liegenden Sachkontext auswirkt, können entscheidende Kompetenzen erworben werden. Ein geeigneter Zugang hierfür bietet durch den Einsatz einer dynamischen Geometriesoftware.

Des Weiteren können funktionale Beziehungen genutzt werden, um Phänomene der Umwelt zu erklären. Die Gleichung für den Umfang eines Quadrates $u = 4a$ kann je nach Darstellungsweise das Verständnis fördern, weshalb eine Verdopplung der Seitenlänge eine Verdopplung des Umfangs zur Folge hat (vgl. Vollrath & Weigand, 2007, S. 143). Analog können auch Kausalitäten physikalischer Naturgesetze funktional aufgefasst und untersucht werden (vgl. Vollrath, 1989, S. 23), wobei sich diese vermutlich der außerschulischen Lebenswelt der Kinder entziehen.

Haben die Lernenden den linearen Zusammenhang erfasst, beschrieben und quantifiziert, können die Erkenntnisse zum rationalen Handeln in der Umwelt eingesetzt werden. Durch neue Problemstellungen wird die mathematische Analyse linearer Funktionen angeregt (vgl. Büchter, 2008, S. 4). Für die Zuordnung *„Seitenlänge → Umfang eines Quadrats"* kann bei gegebenem Umfang durch das Lösen einer Gleichung die Länge der Seite eindeutig bestimmt werden (vgl. Vollrath & Weigand, 2007, S. 143). Für Ware-Preis-Beziehungen können ebenfalls präzise Überlegungen angestellt werden, wodurch Handlungen zielgerichtet geplant werden können. Je nach Sachkontext kann untersucht werden, wie viel Geld für eine bestimmte Warenanzahl benötigt wird bzw. welche Menge eines Produktes für einen bestimmten Betrag erworben werden kann. Umkehraufgaben dieser Art regen eine tiefergehende Auseinandersetzung mit der Sachsituation an. Wichtig hierfür ist es, stets eine qualitative und intuitive Betrachtung an den Anfang zu stellen und diese schrittweise zu mathematisieren. Gleiches gilt für die Ermittlung der Nullstelle einer linearen Funktion. An dieser Stelle ist es erforderlich, zunächst deren Bedeutung im Kontext abzuklären, ehe sich eine rationale Bestimmung dieses Arguments je nach Darstellungsart anschließt.

Im weiteren Verlauf bieten sich Modellierungen an, bei denen beispielsweise systematisch untersucht wird, ob der Abschluss eines Handy-Vertrags oder die Weiternutzung eines Prepaid-Tarifs lohnenswerter ist (vgl. Laakmann, 2013, S. 87). Ähnliche Überlegungen sind bei der Betrachtung unterschiedlicher Taschengeld-Vereinbarungen möglich. Diese offenbaren, neben dem Lebensweltbezug der Aufgabe, auch individuelle Entscheidungsoptionen je nach Ausganglage der Kinder und ermöglichen dadurch einen persönlichen Zugang zur Aufgabe. Die Schüler*innen erfahren durch analoge Aufgabenstellungen, dass (lineare) Funktionen eingesetzt werden können, um Probleme zu lösen, Ereignisse vorherzusagen oder Aussagen über Vergangenes zu treffen (vgl. Vollrath, 1989, S. 19). Dies erfordert, die gegebenen Informationen der Sachsituation zunächst aus der Perspektive funktionaler Zusammenhänge zu erkennen und im Anschluss daran geeignet zu modellieren.

Neben der Beschreibung und Erklärung linearer Wachstumsprozesse, welche die Grundlage rationalen Handelns in der Umwelt bilden, können funktionale Zusammenhänge auch genutzt werden, um die Umwelt zu erforschen und kreativ in ihr zu handeln (vgl. Vollrath & Weigand, 2007, S. 143–144). Entdeckendes Lernen soll die forschende Haltung der empirisch arbeitenden Wissenschaften aufnehmen, um Hypothesen aufzustellen und zu überprüfen (vgl. Vollrath & Weigand, 2007, S. 144). Im Zuge des Selbstlernmaterials ist die Durchführung eines Experiments jedoch an die individuellen Bedingungen der Lernenden gebunden und nur mit haushaltsüblichen Materialien umsetzbar. Alternativ können Simulationen eingesetzt werden, welche mit Hilfe einer dynamischen Geometriesoftware erzeugt und den Lernenden zur Verfügung gestellt werden. Diese unterstützen die Kinder bei der Identifikation des dynamischen Charakters funktionaler Zusammenhänge. Kreatives Handeln hingegen kann in vielen Mustern der Kunst und Architektur wiedergefunden werden (vgl. Vollrath & Weigand, 2007, S. 145). Denkbar sind Aufgaben, in denen die Schüler*innen Gesetzmäßigkeiten zur Bildung von Punkte- oder Streichholzmustern erkennen und in geforderte Darstellungen funktionaler Abhängigkeiten überführen. Dies verdeutlicht, dass lineare Funktionen nicht nur erkannt, sondern vielmehr erzeugt und geeignet konstruiert werden können (vgl. Vollrath & Weigand, 2007, S. 144). Mithilfe von Bunt- oder Filzstiften haben die Kinder auch im Fernunterricht die Möglichkeit entsprechende Figuren zu legen. Dadurch wird ihnen ein Zugang über die Ebenen des EIS-Prinzips ermöglicht.

Die Betrachtungen zu denkbaren Problemstellungen und Zugängen sind keineswegs abgeschlossen und stellen lediglich grundlegende Phänomene funktionaler Zusammenhänge dar, die es aufzugreifen gilt. Darüber hinaus finden sich zahlreiche Beispiele, welche ähnliche Untersuchungen erlauben. Es wird deutlich, dass lineare Funktionen einen Beitrag leisten, die Umwelt zu beschreiben, zu erklären sowie rational und kreativ in ihr zu handeln. Adäquate, problemorientierte Aufgabenstellungen, in denen Schüler*innen erlernte Werkzeuge zur Lösung einsetzen, sind eng mit verschiedenen Darstellungswechseln verbunden. Die aufgeschlüsselten Betrachtungen zeigen zudem, dass ein hoher Bezug zur Lebenswelt der Lernenden hergestellt werden muss, um funktionale Zusammenhänge erfahrbar zu machen. Der Einsatz von Sach- und Anwendungsaufgaben, die mathematische Fragestellungen aufgreifen, ist in diesem Kontext unverzichtbar und sollte der kalkülhaften Behandlung vorangestellt werden.

### 5.2.5 Vorwissen

Das Kapitel zur Entwicklung funktionalen Denkens zeigt auf, dass die Behandlung funktionaler Zusammenhänge im Unterricht weit mehr umfasst, als die kalkülhafte Betrachtung unterschiedlicher Funktionstypen. Aufgrund der vielfältigen Facetten des Begriffs, wird in den Bildungsstandards vielmehr von einer Leitidee „Funktionaler Zusammenhang“ gesprochen, welche das Curriculum spiralförmig durchzieht (vgl. Kultusministerkonferenz, 2004, S. 9). Es wird deutlich, dass ein kompetenzorientierter Umgang mit diesem komplexen mathematischen Konzept nur durch einen sukzessiven Aufbau erfolgen kann. Zwar wird der Funktionsbegriff erstmals bei der Behandlung der linearen Vertreter explizit im Schulkontext aufgegriffen, erste Erfahrungen mit Abhängigkeiten zwischen zwei Größen sammeln die Lernenden jedoch bereits im Primarbereich sowie in den unteren Jahrgangsstufen der weiterführenden Schulen. In diesem Abschnitt wird untersucht, an welches Vorwissen die Lehrenden bei der Unterrichtung linearer Funktionen anknüpfen können. Hierbei werden sowohl mathematische Fähigkeiten, als auch Erfahrungen aus der Lebenswelt der Schüler*innen berücksichtigt. Zentrale Erkenntnisse ergeben sich diesbezüglich aus den Bildungsstandards im Fach Mathematik. Zudem wird der sächsische Lehrplan für Oberschulen aufgrund seiner hierarchischen Struktur als ergänzendes Medium hinzugezogen.

Ein Blick in die Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich verdeutlicht, dass inhaltliche Kompetenzen bereits im Grundschulalter aufgebaut werden. Unter dem Aspekt „Muster und Strukturen“ gilt es, die Fähigkeit zu fördern, bestimmte Gesetzmäßigkeiten zu erkennen, zu beschreiben und darzustellen (vgl. Kultusministerkonferenz, 2005, S. 10). Hierzu zählen geometrische und arithmetische Muster – beispielsweise in Form von Zahlenfolgen – denen systematische Änderungen zugrunde liegen, sodass der Kovariationsaspekt an dieser Stelle implizit aufgegriffen wird. Weiterhin sollen die Lernenden frühzeitig für das Erkennen, Beschreiben und Darstellen funktionaler Beziehungen geschult werden (vgl. Kultusministerkonferenz, 2005, S. 11). Analog wird der Einsatz von Sachsituationen angeführt, aus denen funktionale Zusammenhänge identifiziert und verbalisiert werden sollen. Hinsichtlich der Ausdrucksform wird neben der Situationsbeschreibung auf den Einsatz tabellarischer Darstellungen verwiesen (vgl. Kultusministerkonferenz, 2005, S. 11). Mit dem Erstellen einer Tabelle aus einem Sachkontext erfahren die Schüler*innen bereits frühzeitig eine grundlegende mathematische Kompetenz. Das Erzeugen von Tabellen, Schaubildern und Diagrammen sowie das Ablesen von Informationen aus diesen Darstellungen wird ebenfalls im Abschnitt „Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit“ aufgegriffen (vgl. Kultusministerkonferenz, 2005, S. 11). So wird nicht nur ein Übersetzungsprozess zwischen zwei Darstellungsarten erprobt, sondern gleichermaßen der exakte Einsatz der Zeichengeräte geschult, der wiederum beim Erstellen graphischer Darstellungen in der

Sekundarstufe vorausgesetzt wird. Gleichermaßen fordern die Bildungsstandards bereits im Primarbereich einfache Sachaufgaben, denen ein proportionaler Zusammenhang zugrunde liegt (vgl. Kultusministerkonferenz, 2005, S. 11). Einfache Ware-Preis-Beziehungen sind den Lernenden somit bereits aus der Grundschule sowie aus Alltagssituationen bekannt und können bei weiterführenden funktionalen Betrachtungen aufgegriffen werden. Für die Entwicklung funktionalen Denkens bedeutet dies, dass die Schüler*innen ausgewählte Zusammenhänge bereits frühzeitig intuitiv erfahren. Vordergründig geht es um das Erkennen und Beschreiben dieser Abhängigkeiten, das Erzeugen von Tabellen und Diagrammen und deren Interpretation sowie das Lösen einfacher Rechenaufgaben, wobei stets ein hoher Bezug zu Sachsituationen angestrebt wird.

In den weiterführenden Schulen soll den Lernenden nun unmittelbar die zu Beginn dieses Kapitels erwähnte Leitidee „Funktionaler Zusammenhang" nähergebracht werden. In Abschnitt 5.2.1 dieser Arbeit wurde verdeutlicht, dass proportionale Funktionen einen Spezialfall linearer Abbildungen darstellen. Vollrath und Weigand schlagen deshalb einen induktiven Unterrichtsaufbau vor, welcher die Kenntnisse zur Proportionalität aufgreift. In diesem Zusammenhang sprechen sie von einem *Lernen durch Erweiterung* (vgl. Vollrath & Weigand, 2007, S. 160). Es wird ersichtlich, dass dieser Unterrichtsweg ein fundiertes Wissen zu direkt proportionalen Zuordnungen voraussetzt. Situationen, denen ein indirekt proportionaler Zusammenhang zu Grunde liegt, können bei der Unterrichtung vor allem als abgrenzende Beispiele aufgegriffen werden. Entsprechende Vorkenntnisse sind im Rahmen dieser Arbeit jedoch zu vernachlässigen.

Das Thema „Lineare Funktionen" erfordert von den Lernenden einen kompetenten Umgang mit sprachlichen, tabellarischen und graphischen Darstellungsformen, die bereits bei proportionalen Zuordnungen in Klassenstufe 6 eine zentrale Rolle spielen (vgl. Sächsisches Staatsministerium für Kultus, 2019a, S. 24). Das Erstellen von Wertetabellen, das Berechnen des Proportionalitätsfaktors sowie das Erzeugen von zugehörigen Zuordnungsgraphen greift mathematische Tätigkeiten auf, mit denen sich die Lernenden in diesem Zusammenhang bereits beschäftigt haben. In der Auseinandersetzung mit Koordinatensystemen wird sich an dieser Stelle zunächst auf den ersten Quadranten beschränkt. Eine Erweiterung des Koordinatensystems auf vier Quadranten erfolgt jedoch bereits bei der Einführung der rationalen Zahlen, sodass dahingehend erforderliche Kenntnisse vorausgesetzt werden können (vgl. Sächsisches Staatsministerium für Kultus, 2019a, S. 40). Die Interpretation zugehöriger Darstellungen erfolgt in diesem Kontext vorwiegend über „je-desto“- bzw. „wenn-dann“-Aussagen (vgl. Sächsisches Staatsministerium für Kultus, 2019a, S. 23). Das bedeutet, dass nicht nur der Zuordnungsaspekt, sondern auch der Kovariationsaspekt bereits bei der Proportionalität berücksichtigt wird. Letzterer wird gleichermaßen bei der Anwendung der Dreisatz-Rechnung eingefordert, welche einen zentralen Kern bei der Untersuchung proportionaler Abhängigkeiten bildet (vgl. Sächsisches Staatsministerium für Kultus, 2019a, S. 24). Mit der Einführung des Dreisatzes werden proportionale Zusammenhänge zudem als Grundlage zur Problemlösung erfahren (vgl. Kultusministerkonferenz, 2004, S. 12). Im Kontext der linearen Funktionen gilt es, das Erkennen der Kovariation zu fördern und die Schüler*innen für die Erweiterung ihrer kognitiven Konzepte zu sensibilisieren. Außerdem wird an bestehende Problemlösestrategien angeknüpft, um lineare Funktionen auf diese Weise als praktisches Hilfsmittel zu begreifen. Hierfür sind lebensnahe Zugänge und Sachsituationen notwendig, wie sie auch in den Bildungsstandards der weiterführenden Schulen gefordert werden (vgl. Kultusministerkonferenz, 2004, S. 12). Es bietet sich an, Beispiele auszuwählen, denen ein proportionaler Zusammenhang zugrunde liegt, um diesen im späteren Verlauf auf einen linearen Kontext auszuweiten. Weg-Zeit-Abhängigkeiten werden dahingehend auch im Physik-Unterricht der Jahrgangsstufe 6 aufgegriffen und ermöglichen eine fächerübergreifende Vernetzung (vgl. Sächsisches Staatsministerium für Kultus, 2019b, S. 19).

Zwar erfahren die Lernenden bei der Unterrichtung proportionaler Zuordnungen bereits die Bedeutung des Proportionalitätsfaktors, jedoch wird dabei vorerst auf die explizite Einführung der Funktionsgleichung in der $f(x)$-Schreibweise verzichtet. Aufgrund des induktiven Unterrichtszugangs ist es sinnvoll, an die Vorkenntnisse zur direkten Proportionalität anzuknüpfen und zunächst die Funktionsgleichung der Form $f(x) = m \cdot x$ einzuführen. Vollrath zeigt diesbezüglich verschiedene Möglichkeiten auf (vgl. Vollrath, 1982, S. 7ff.), wobei für die vorliegende Materialreihe der Weg der Verallgemeinerung herangezogen wird. Die Aufgabe des Lehrenden ist es, die Form des Terms mit der Gestalt des zugehörigen Graphens in Verbindung zu setzen, um die Perspektive auf das Ganze zu fördern. Gelingt es, die Zusammenhänge zwischen den Darstellungsformen für proportionale Zuordnungen herzustellen sowie an das vorhandene Vorwissen anzuknüpfen, können lineare Funktionen sinnstiftend eingeführt werden.

Entscheidend für eine gelungene Herleitung der Termschreibweise sind Vorkenntnisse im Umgang mit Variablen, wobei auf die entsprechenden Grundvorstellungen zurückgegriffen wird. Während die im Kontext der linearen Funktionen verwendeten Buchstaben $m$ und $n$ die Funktion eines Parameters übernehmen und unter dem Einzelzahlaspekt zu verstehen sind, handelt es sich bei $x$ um eine Veränderliche, die als beliebige Zahl ein bestimmtes Intervall durchläuft. Malle spricht dahingehend vom Bereichsaspekt (vgl. Malle, 1993, S. 80). Bei der Berechnung von Funktionswerten und Argumenten wird jedoch auch der Einsetzungsaspekt thematisiert, bei dem Variablen als Platzhalter verstanden werden (vgl. Malle, 1993, S. 46). Letztere Perspektive setzt wiederum die Fähigkeit zum Lösen linearer Gleichungen voraus. Der Auftrag des Lehrenden ist es, an dieser Stelle den Bezug zwischen linearen Gleichungen und zugehörigen Funktionen herzustellen sowie die erforderlichen Lösungsverfahren, welche die Lernenden dahingehend besitzen, zu aktivieren (vgl. Sächsisches Staatsministerium für Kultus, 2019a, S. 43).

Resümierend zeigen die Ausführungen zur Untersuchung des Vorwissens, dass fundamentale Grundlagen bereits im Lernbereich der proportionalen Zuordnungen ausgebildet werden. Den Schüler*innen sind die Ausdrucksformen Tabelle, Sachsituation und Graph bereits bekannt, sodass die Funktionsvorschrift unter Berücksichtigung der Kenntnisse zu Termen und Gleichungen als weitere Darstellungsmöglichkeit hergeleitet werden kann. Neben den verschiedenen Visualisierungen sowie den damit verbundenen Übersetzungsprozessen kann zudem an inhaltliche Vorstellungen angeknüpft werden. Es wird deutlich, dass nicht nur der Zuordnungsaspekt, sondern auch der Kovariationsaspekt bereits im proportionalen Kontext betrachtet wird. Durch einen hohen Anwendungsbezug können außerschulische Erfahrungen der Kinder in den Lernprozess aufgenommen werden. Indem die Inhalte zu proportionalen Zusammenhängen aktiviert und angemessen erweitert werden, ist es möglich, lineare Funktionen über einen induktiven Weg in den Unterricht zu integrieren.

### 5.2.6 Fehlvorstellungen und Lernschwierigkeiten

Die didaktischen Überlegungen zur Materialreihe „Lineare Funktionen“ werden mit einem Überblick über typische Fehler, die im Lernprozess der Schüler*innen auftreten können, fortgesetzt. Den Lehrenden soll somit die Möglichkeit gegeben werden, Schwierigkeiten und Verständnisprobleme der Kinder zu antizipieren und entsprechende

Schlussfolgerungen für die eigene Unterrichtsplanung abzuleiten. Einerseits kann irrtümlichen Denkprozessen und Annahmen der Lernenden auf diese Weise vorgebeugt werden. Zum anderen sind Lehrkräfte dadurch in der Lage, verständnisvoll mit den Fehlvorstellungen umzugehen und die Schüler*innen aktiv und angemessen bei der Überwindung von Unklarheiten zu unterstützen. Die nachfolgende Analyse bezieht sich auf Schwierigkeiten hinsichtlich des Begriffsverständnisses, der Kenntnis von Beispielen und Gegenbeispielen sowie benötigter Unterbegriffe und berücksichtigt ebenfalls Hürden im Umgang mit unterschiedlichen Darstellungsformen. Die Grundlage bilden verschiedene empirische Erhebungen, wobei vor allem jene Erkenntnisse herangezogen werden, welche für die Einführung linearer Funktionen bedeutend sind.

#### a) Begriffsverständnis und Erkennen von Beispielen und Gegenbeispielen

Zunächst werden Verständnisprobleme hinsichtlich einer korrekten Begriffsauffassung untersucht, die sich schließlich auch auf die Kenntnis zugehöriger Beispiele und Gegenbeispiele übertragen. Bei verschiedenen Studien fällt auf, dass zahlreiche Teilnehmer*innen lediglich eine unzureichende oder gar fehlerhafte Definition des Funktionsbegriffs wiedergeben konnten (vgl. Vinner, 1983; Vinner & Dreyfus, 1989). Mitunter besaßen sie sogar eine falsche Vorstellung von dem, was in der Mathematik unter dem Terminus einer Funktion verstanden wird. Deutlich wurde, dass Funktionen oft auf die Darstellungsform der Funktionsgleichung reduziert und ausschließlich „als Regel, Rechnung, Gleichung oder Formel“ aufgefasst wurden (vgl. Müller-Philipp, 1994, S. 55). Die Beschränkung der Definition auf eine Darstellungsweise spiegelt dahingehend eine lediglich unzureichende Begriffsauffassung wider. Gelang den Schüler*innen die Wiedergabe einer exakten Definition doch, so ergaben sich mitunter neue Probleme bei deren Anwendung im Aufgabenkontext. Es wurde festgestellt, dass Schüler*innen auf Grundlage einer angemessenen Definition nicht entscheiden konnten, ob es sich bei konkreten Beispielen um eine Funktion handelte oder nicht (vgl. Vinner, 1983, S. 294). Dass die Lernenden ihr Begriffsverständnis an die Existenz einer passenden Funktionsgleichung koppelten, setzte sich analog bei der graphischen Ausdrucksweise fort. Vielen Kinder fiel es schwer, eine unregelmäßige Kurve als Funktion zu akzeptieren, auch wenn es sich definitionsgemäß um eine solche handelte (vgl. Müller-Philipp, 1994, S. 55). Funktionsgraphen, die Unstetigkeiten in Form von Lücken, Polstellen, Knicken oder Sprüngen aufwiesen, wurden von einigen Studienteilnehmenden ebenfalls nicht als Funktion angenommen (vgl. Vinner & Dreyfus, 1989, S. 361). Ähnlich verhielt es sich bei graphischen Ausdrücken, deren Definitionsmenge auf die natürlichen Zahlen beschränkt war (vgl. Markovits, Eylon & Bruckheimer, 1986, S. 22). Darstellungen, die vertikale Abschnitte enthielten, wurden zwar richtigerweise verworfen, allerdings wurde diese Entscheidung vielmehr mit ästhetischen Kriterien anstatt unter Berücksichtigung einer Definition begründet (vgl. Tall, S. 8). Parallelen zeigten sich bei der Akzeptanz bestimmter algebraischer Ausdrücke. Dies betraf sowohl zusammengesetzte als auch konstante Funktionen (vgl. Markovits et al., 1986, S. 20), wobei Letztere in der graphischen Darstellung von den Teilnehmenden weniger problematisch gesehen wurden (vgl. Tall, S. 8).

Als Ursache für diese Missverständnisse sieht Vinner eine Diskrepanz zwischen dem *concept image*, also der gesamten kognitiven Struktur, welche mit einem Begriff verbunden wird, sowie der *concept definition*, einer exakten Begriffsdefinition. Er fügt an, dass die Lernenden bei der Anwendung einer Definition vorwiegend ihre persönlichen Erfahrungen im Umgang mit Funktionen aktivieren. Sie nutzen die Ressourcen ihres concept images (vgl. Vinner, 1983, S. 294). Entsprechende Fehlvorstellungen beruhen auf unzureichend ausgeprägten Grunderfahrungen, die vor allem aus streng formalen Funktionsbetrachtungen resultieren. So ist es nicht verwunderlich, dass Teilnehmer*innen einer Studie hauptsächlich lineare Funktionen angaben, als sie nach Beispielen für funktionale Zusammenhänge gefragt wurden (vgl. Markovits et al., 1986, S. 24). Um Lernhürden effektiv vorzubeugen, müssen concept image und concept definition im Einklang miteinander stehen.

An dieser Stelle ist es die Aufgabe der Lehrperson, den Begriff mit seinen vielfältigen Facetten lebendig zu erfahren und daran anknüpfend mit einer exakten Definition zu vereinen. Die enge Kopplung des Begriffs an eine Darstellungsform kann dadurch vermieden werden, dass bereits frühzeitig auch Funktionen betrachtet und beschrieben werden, die im Schulkontext nicht durch eine Funktionsgleichung wiedergegeben werden können. Durch die Interpretation graphischer Darstellungen unstetiger oder zusammengesetzter Funktionen kann das inhaltliche Verständnis für zugrunde liegende Abhängigkeiten entscheidend gefördert werden. Es wird ersichtlich, dass eine zu starke Orientierung an stetigen Funktionen den Lernprozess sogar hemmen kann. Somit sollten qualitative Betrachtungen funktionaler Zusammenhänge fest im Unterrichtsgeschehen verankert sein.

### b) Kenntnis von Unterbegriffen

Die Voraussetzung für den Umgang mit Funktionen und ihren Darstellungen bildet die Kenntnis entsprechender Unterbegriffe. Zu nennen seien an dieser Stelle die Begriffe *Urbild* und *Bild* sowie ihre Synonyme *Argument* und *Funktionswert* als Elemente des *Definitions-* und *Wertebereichs*. Zentrale Fachbegriffe wie Anstieg und y-Achsenabschnitt werden ebenso wie die Begriffe Graph, Wertetabelle und Funktionsgleichung erst im folgenden Unterabschnitt beleuchtet.

Thomas stellte in seinen Untersuchungen einst fest, dass „das Berechnen von Funktionswerten oder das Ablesen von Bildern in Tabellen, Graphen und Pfeildiagrammen" (Müller-Philipp, 1994; zitiert nach Thomas, 1975) Grundfertigkeiten seien, welche die Lernenden bereits früh erfahren. Allerdings verdeutlichten andere Datenerhebungen, dass hieraus nicht zwangsläufig geschlussfolgert werden kann, dass die Schüler*innen auch in der Lage sind, flexibel mit diesen Begriffen zu operieren (vgl. Markovits et al., 1986). Es zeigten sich vielmehr Schwierigkeiten bei der Verknüpfung der Begriffe Urbild und Bild mit der zugehörigen Achse, um entsprechende Werte im Koordinatensystem abzulesen (vgl. Markovits et al., 1986, S. 21). Dabei ist das Bestimmen von Punktepaaren weniger problematisch als die Kenntnis der jeweiligen Begrifflichkeiten. Die Untersuchungen offenbarten diesbezüglich besonders große Herausforderungen bei Schnittpunkten zwischen dem Funktionsgraphen und den Koordinatenachsen, welche die Autoren auf die Doppelrolle als Bild bzw. Urbild und (Urbild, Bild)-Paar zurückführten (vgl. Markovits et al., 1986, S. 21). Wohingegen der Terminus des y-Achsenabschnitts sprachlich auf die zugehörige Koordinatenachse verweist, wird dies bei analogen Betrachtungen von Nullstellen eigenständig von den Lernenden verlangt. Der Auftrag der Lehrperson ist es, die Begriffe Urbild und Bild sowie deren Synonyme exakt zu verwenden und diese stets mit den zugehörigen Variablen und Koordinatenachsen in Verbindung zu setzen.

Abschließend sei zu erwähnen, dass den Schüler*innen ebenfalls die Bedeutung der Begriffe Definitions- und Wertebereich auch in höheren Jahrgangsstufen nicht immer geläufig ist. Vielmehr werden Funktionen, welche dieselbe Zuordnungsvorschrift, jedoch unterschiedliche Definitionsbereiche besitzen, als identisch aufgefasst (vgl. Markovits et al., 1986, S. 22). Hinsichtlich der Entscheidung, ob eine Gerade im Koordinatensystem als durchgängige Linie veranschaulicht werden darf oder nicht, können die Schüler*innen bereits bei proportionalen und linearen Funktionen für eine Beachtung des Definitionsbereichs sensibilisiert werden. Beide Begriffe werden im vorliegenden Material allerdings nicht explizit eingeführt, sodass sie auch für die Fehleranalyse zurückgestellt werden.

**c) Umgang mit verschiedenen Darstellungen**

Die verschiedenen Darstellungsformen, mit denen Funktionen im Unterricht ausgedrückt werden, erfordern von den Lernenden die Anwendung zahlreicher Übersetzungsprozesse. Abschließend wird untersucht, welche mathematischen Fähigkeiten im Umgang mit den vorgestellten Darstellungen gelingen und an welchen Punkten bei den Kindern Schwierigkeiten zu erwarten sind.

Aufgaben, welche das Lesen von Darstellungen betreffen – bei denen also Argumente, Funktionswerte oder Punktepaare aus graphischen oder tabellarischen Darstellungen entnommen werden müssen – stellen im Allgemeinen ebenso wenig Probleme dar, wie das Eintragen von Punkten in ein gegebenes Koordinatensystem (vgl. Kerslake, 1982, S. 123f.). Die auftretenden Komplikationen bei der Verknüpfung der Begriffe Bild und Urbild mit den Koordinatenachsen wurden bereits im vorhergehenden Abschnitt erläutert. Andere Studien zeigten bezüglich der graphischen Darstellung jedoch weitere Schwierigkeiten auf. Leinhardt et al. stellten in diesem Zusammenhang fest, dass Schüler*innen lokale Untersuchungen auch da anstellten, wo globale Betrachtungen bestimmter Intervalle und Tendenzen gefragt waren. Dieses Phänomen bezeichneten sie als *interval/point confusion* (vgl. Leinhardt, Zaslavsky & Stein, 1990, S. 37). Auffällig dahingehend war auch, dass zwischen einzelnen Wertepaaren überproportional häufig ein linearer Zusammenhang angenommen wurde. Mitunter wurden auch die Kenngrößen des Anstiegs und des Funktionswerts sowie deren Bedeutung verwechselt, was unter dem Terminus *slope/height confusion* zusammengefasst wird (vgl. Leinhardt et al., 1990, S. 37). Hierbei ist gemeint, dass Schüler*innen mit dem maximalen Funktionswert argumentierten, obwohl die maximale Wachstumsrate als Antwort erwartet wurde. Die Probleme bei der Unterscheidung von Bestand und Änderung resultieren vorwiegend aus Schwierigkeiten beim Erfassen und Beschreiben des Änderungsverhalten der zugrunde liegenden Zusammenhänge (vgl. Roth & Stiller, 2016, S. 2). Die größten Hürden bereiten den Lernenden allerdings ganzheitliche Interpretationen graphischer Darstellungen. Wird ein Graph nicht als Abhängigkeitsbeziehung zweier Größen erfasst, sondern als Bild der Situation verstanden, wird in der Literatur von der *iconic* *representation* bzw. dem *„Graph-als-Bild"*-Fehler gesprochen (vgl. Leinhardt et al., 1990, S. 39). Weg-Zeit-Diagramme stellen die Lernenden dahingehend vor enorme Schwierigkeiten, da diese ein hohes Potential für Fehlinterpretationen bieten. Extrempunkte werden in diesem Kontext häufig als Täler bzw. Berge einer Landschaft missverstanden, wobei das Monotonieverhalten fälschlicherweise als hinauf- bzw. hinabgehen ausgelegt wird (vgl. Kerslake, 1982, S. 128–129). Die Schüler*innen sollten umso mehr mit Weg-Zeit-Zusammenhängen konfrontiert werden, wobei der Einsatz von Computersimulationen zu deren gelungener Deutung beitragen und ein tiefgreifendes Verständnis fördern kann.

Nachdem zunächst Herausforderungen in der Interpretation graphischer und tabellarischer Repräsentationen analysiert wurden, werden nachfolgend Schwierigkeiten bei entsprechenden Darstellungswechseln untersucht. Wenig Probleme bereitete den Lernenden das Aufstellen einer Wertetabelle aus einem Graphen sowie das Eintragen von Punkten in ein gegebenes Koordinatensystem (vgl. Markovits et al., 1986; Thomas, 1975). Komplikationen ergaben sich bei einigen Lernenden nur im Umgang mit Dezimalzahlen, sodass dies bei der Unterrichtung leistungsschwächerer Schüler*innen hinsichtlich der Aufgabenauswahl berücksichtigt werden sollte (vgl. Kerslake, 1982, S. 121–122). Zwangsläufig werden bei der Übersetzung einer Wertetabelle in einen Graphen auch andere Kompetenzen, wie die Konstruktion eines geeigneten Koordinatensystems oder die Frage nach dem Definitionsbereich herangezogen. Die Studien geben darüber jedoch keinen Aufschluss. Es ist allerdings naheliegend, dass das Arbeitstempo beim Zeichnen eines Koordinatensystems gerade in heterogenen Lerngruppen sehr unterschiedlich ausfällt, sodass diese Kompetenz für Leistungsschwächere eine zusätzliche Herausforderung darstellt (vgl. Müller-Philipp, 1994, S. 89).

Wenig Probleme bereitete den Lernenden das Aufstellen einer Wertetabelle aus einer Funktionsgleichung. Schwierigkeiten bei der Berechnung von Urbildern aus Funktionswerten bei einer gegebenen Funktionsvorschrift führen Markovits et al. auf technische Defizite beim Lösen von Gleichungen zurück (vgl. Markovits et al., 1986, S. 22). Unklarheiten entstanden bei den befragten Schüler*innen zudem dann, wenn bei der Berechnung von Funktionswerten statt der $y$- die $f(x)$-Schreibweise verwendet wurde (vgl. Herscovics, 1982, S. 72). Offensichtlich ist die funktionale Schreibweise für die Lernenden schlicht weniger greifbar. Im Sinne einer adäquaten Vorbereitung auf höhere Jahrgangsstufen sollte diese Notation nachhaltig eingeführt und mit entsprechenden Übungsaufgaben manifestiert werden. Arbeitsaufträge, bei denen die Bildungsvorschrift aus gegebenen Datenpaaren entdeckt werden sollte, zeigten vielmehr, dass die Schüler*innen durchaus in der Lage waren, die jeweils vorliegenden Gesetzmäßigkeiten zwischen den Paaren zu erkennen und diese auf andere Wertepaare anzuwenden. Es mangelte ihnen lediglich an der Kompetenz, die eigenen Denkmuster in eine passende Funktionsgleichung zu überführen (vgl. Herscovics, 1982, S. 73).

Es bleibt zu untersuchen, welche Lernhürden bei der Übersetzung zwischen dem Graphen und der Funktionsgleichung bestehen. Es wird davon ausgegangen, dass den Lernenden die Erzeugung einer graphischen Darstellung weniger Probleme bereitet als die entgegengesetzte Richtung. Begründet wird dies damit, dass eine Wertetabelle als Zwischenschritt genutzt werden kann (vgl. Müller-Philipp, 1994, S. 82). Im Allgemeinen stellen jedoch beide Darstellungswechsel die Schüler*innen vor erhebliche Herausforderungen und bürgen ein hohes Fehlerpotenzial. Leinhardt et al. stellten diesbezüglich in einer Testung fest, dass lediglich ein Fünftel der 17-Jährigen in der Lage waren, den Graphen einer linearen Funktion unter Vorgabe der Funktionsvorschrift zu zeichnen. Die korrekte Funktionsgleichung konnten im umgekehrten Aufgabenteil nur 5 % der Befragten aufstellen (vgl. Leinhardt et al., 1990, S. 35). Barr untersuchte ebenfalls, welche Herausforderungen analoge Aufgabenstellungen bereithielten. Die Ergebnisse offenbarten, dass die Schüler*innen bei linearen Funktionen nur bedingt in der Lage waren, die Parameter des Anstiegs sowie des y-Achsenabschnitts im Funktionsgraphen zu identifizieren und mit der korrekten Gleichung zu verknüpfen (vgl. Barr, 1981, S. 14ff.). Es können somit erhebliche Defizite im Zusammenspiel der beiden Darstellungsformen angenommen werden. Ähnliche Probleme bereitete die Formel zur Berechnung des Anstiegs über ein geeignetes Steigungsdreieck. Barr führt dazu an, dass die Idee, den Anstieg als Verhältnis aufzufassen, Verwirrungen und neue Hürden bei den Lernenden hervorrufen würde (vgl. Barr, 1981, S. 17). Es ist anzunehmen, dass beide Parameter im Unterricht nur bedingt mit inhaltlichen Vorstellungen verknüpft wurden. Vielmehr gilt es, nicht nur das mathematische Kalkül von Anstieg und y-Achsenabschnitt zu lehren, sondern beide Begriffe qualitativ und nachhaltig erfahrbar zu vermitteln.

Die Untersuchungen hinsichtlich möglicher Fehlvorstellungen und Lernschwierigkeiten haben gezeigt, dass sowohl bei der Begriffsauffassung sowie zentralen Unterbegriffen, als auch bei entsprechenden Darstellungswechseln vielfältige Unklarheiten auftreten können. Es wurde angemerkt, dass die Vorstellungen der Lernenden mit einer exakten Definition in

Einklang stehen müssen, um diese nachhaltig zu verinnerlichen und im Aufgabenkontext anwenden zu können. Hierzu ist es erforderlich, verschiedene Darstellungsformen in den Unterrichtsprozess einzubeziehen und die Lehre auf allgemeinere funktionale Zusammenhänge auszuweiten. Es ist nicht ratsam, den Unterricht ausschließlich auf Funktionstypen zu beschränken, die durch simple Terme beschreibbar sind oder deren Graphen als „ordentliche“ Kurven in Erscheinung treten. Bei der Interpretation gilt es, globale Betrachtungsweisen bestimmter Intervalle in den Deutungsprozess einzubeziehen. In diesem Kapitel wurden abschließend potentielle Fehler im Umgang mit den Darstellungsformen und zugehörigen Translationen analysiert. Die größten Probleme sind diesbezüglich bei der unmittelbaren Übersetzung zwischen dem Graphen und der zugehörigen Funktionsgleichung zu erwarten. Nichtsdestotrotz offenbarten auch andere Darstellungswechsel denkbare Hürden für die Lernenden, welche bei der Unterrichtung zu berücksichtigen sind.

### 5.2.7 Differenzierung und didaktische Reduktion

Die Analyse der Rahmenbedingungen der Schüler*innen in Abschnitt 2.1 verdeutlichte eine ausgeprägte Heterogenität innerhalb der Lerngruppen. Durch die konzeptionelle Ausrichtung der Carl-von-Ossietzky-Schule als Gemeinschaftsschule findet eine äußere Differenzierung der Lernenden nicht statt, weshalb große Unterschiede hinsichtlich des Vorwissens, des Leistungsstands und des Arbeitstempos sowie in Bezug auf die Lernmotivation vorliegen. Diese Ausgangssituation erfordert eine angemessene Aufbereitung der Unterrichtsinhalte. Hierzu wird im Folgenden untersucht, an welchen Stellen eine didaktische Reduktion notwendig ist und welche Ansätze zur Binnendifferenzierung in das zu entwickelnde Konzept einfließen.

Lineare Funktionen ermöglichen den Schüler*innen den expliziten Einstieg in die Welt funktionaler Zusammenhänge, wenngleich erste Erfahrungen bereits zuvor gesammelt wurden. Trotz der Komplexität, die dieser Lernbereich aufweist, bedeutet didaktische Reduktion nicht, die anspruchsvollen Inhalte bei der Unterrichtung schlicht auszulassen. Vielmehr gilt es, einen geeigneten Zugang zu finden und bedeutsame Aspekte der Thematik zu erfassen (vgl. Lambert & Herget, 2017). Diesbezüglich müssen sowohl lernschwächere als auch leistungsstärkere Kinder gleichermaßen berücksichtigt werden. Konkret erfordert dies, die Inhalte günstig zu vereinfachen, ohne dadurch deren fachliche Erweiterbarkeit zu beschränken (vgl. Hoffkamp & Kaliski, 2017, S. 20). Mathematische Kompetenzen, auf denen in den folgenden Lernbereichen aufgebaut wird, sind dahingehend essentiell bei der Unterrichtung linearer Funktionen. Gleichwohl bedeutet dieser Reduktionsschritt nicht, die Inhalte auf das mathematische Kalkül zu reduzieren, wie es in der Praxis gerade bei Lernschwächeren aufgrund einer nicht-zutrauenden Einstellung seitens der Lehrperson häufig geschieht. Im Mittelpunkt sollte das inhaltliche Verständnis positioniert werden, wobei diese qualitative Auseinandersetzung mit sinnhaften Übungsphasen korrespondieren muss (vgl. Hoffkamp & Kaliski, 2017, S. 20). Eine Vernetzung der mathematischen Darstellungsformen mit der vorliegenden Sachsituation ist für einen nachhaltigen Wissenserwerb unentbehrlich.

Für die zu entwickelnden Materialien heißt dies konkret, dass die Lerninhalte durch einfache, exemplarische Beispiele anwendungsbezogen erfahren werden (vgl. Lambert & Herget, 2017). Die Fülle an funktionalen Zusammenhängen soll auf ein Minimum an typischen Situationen reduziert werden, die einen unmittelbaren Lebensweltbezug herstellen. In diesem Kontext wird die Komplexität der Beispiele gerade dadurch verringert, dass ausgewählte Sachverhalte geeignet modelliert werden. So lassen sich Weg-Zeit-Abhängigkeiten erst durch die Annahme einer konstanten Geschwindigkeit sowie durch das Vernachlässigen der Beschleunigung im Rahmen linearer Funktionen analysieren.

Die Anforderungen hinsichtlich der Lernorganisation, mit denen die Schüler*innen durch den Distanzunterricht konfrontiert werden, erfordern ebenfalls geeignete Reduktionsschritte. Hierfür bietet es sich an, die Inhalte und die Komplexität der mathematischen Arbeitsaufträge durch passende Hilfsangebote zu reduzieren (vgl. Lambert & Herget, 2017). Gestufte Unterstützungsmöglichkeiten können ein Gerüst kreieren, welches den Lernenden mehr Verantwortung für den eigenen Lernprozess überträgt und parallel den Aneignungsprozess individualisiert. Dabei wird deutlich, dass eine klare fachliche sowie formale Strukturierung der Materialreihe unerlässlich ist, um vor allem den lernschwächeren Schüler*innen eine adäquate Lernplattform zu bieten (vgl. Hoffkamp, 2017a, S. 3). Zahlreiche digitale Arrangements helfen den Schüler*innen bei der Bearbeitung der Arbeitsaufträge. Lernvideos begleiten die Kinder bei auftretenden Startschwierigkeiten, während ikonisch-dynamische Computersimulationen einen inhaltlichen Zugang zu funktionalen Zusammenhängen gewährleisten. Gleichzeitig dienen diese Veranschaulichungen dazu, die Lernenden bei komplexen Darstellungswechseln zu entlasten (vgl. Lambert & Herget, 2017). Dadurch soll ein fundiertes Verständnis für die verschiedenen Ausdrucksmittel funktionaler Abhängigkeiten erzeugt werden, ohne eine der Darstellungsarten bei der Betrachtung zu vernachlässigen.

Binnendifferenzierung soll im Rahmen dieser Materialreihe nicht durch unterschiedliche Aufgabenstellungen und Lerninhalte erreicht werden, sondern durch unterstützende Hilfsangebote, die ein individuelles Arbeitstempo sowie einen angemessenen Einstieg ermöglichen. Dies bedeutet nicht, dass die gesamten Lernziele dieser Reihe inhaltlich nicht differenziert werden können. Da die entwickelten Arbeitsblätter zur Einführung linearer Funktionen dienen, werden jedoch zunächst grundlegende mathematische Kompetenzen aufgebaut, die alle Teilnehmenden erfahren sollen. Die aufgestellten Lernziele sind jedoch dahingehend differenzierbar, als dass die zur Verfügung gestellten Hilfsangebote bei Bedarf in Anspruch genommen werden können (vgl. Bruder & Reibold, 2010). Diese sind in Aufgabensets eingebunden, die verschiedene Aufgabentypen zu einem übergeordneten Thema vereinen. Hier findet ein klar strukturiertes Wechselspiel zwischen analogen und digitalen Lernumgebungen statt, sodass die Aufträge abwechslungsreich gestaltet sind und verschiedene Lerntypen ansprechen (vgl. Bruder & Reibold, 2010). Ziel ist es, dass sich die Schüler*innen im Verlauf der Arbeitsblätter zunehmend von den gegebenen Strukturierungshilfen lösen und an Selbstvertrauen gewinnen. Einzelne Arbeitsblätter bieten zudem gestufte Schwierigkeitsgrade an, die jeweils mit * bzw. ** gekennzeichnet sind und sich vor allem an die leistungsstärkeren Lerner*innen richten. Diese Kinder besitzen somit die Möglichkeit, sich intensiver mit den Inhalten auseinanderzusetzen, wodurch sie wiederum eine Vorbereitung für weiterführende Aufgaben erhalten.

Die vorgestellten Differenzierungs- und Reduktionsansätze zielen auf ein fundiertes Basiswissen zu linearen Funktionen ab, welches an geeigneten Stellen vertieft werden kann. Mathematische Fertigkeiten und lebensnahe Sachsituationen sollten unmittelbar miteinander verknüpft werden, um einen niedrigschwelligen Zugang zur Thematik zu garantieren. Die vorliegende Materialreihe besitzt in ihrer konzeptionellen Anlage ein hohes Differenzierungspotential. Dadurch wird allen Schüler*innen ein adäquater und individualisierter Lernprozess ermöglicht, der zahlreiche unterstützende Angebote bereithält. Die vorgestellten Ansätze erfordern einen klaren fachlichen Aufbau der Lerninhalte, der im Einklang mit einer hohen äußeren Struktur des Materials stehen muss (vgl. Hoffkamp, 2017a, S. 3). Diese Konzeption wird im folgenden Kapitel erläutert.

## 5.3 Hinweise zum Aufbau des Materials

### 5.3.1 Inhaltliche und formale Strukturierung

Nachdem das Themengebiet aus fachlicher und didaktischer Perspektive beleuchtet wurde, konnte eine Materialreihe zur Einführung linearer Funktionen erarbeitet werden. Diese wurde in Zusammenarbeit mit der Carl-von-Ossietzky-Schule entwickelt, eignet sich aber gleichzeitig für den Einsatz in weiteren Lerngruppen mit einer ausgeprägten Heterogenität. Neben den didaktisch-methodischen Überlegungen galt es, die Anforderungen, die sich aus den Rahmenbedingungen des Homeschoolings ergeben, in das Unterrichtskonzept einzubeziehen. Im Folgenden wird der strukturelle Aufbau des Materialsets vorgestellt und um zentrale Hinweise zu dessen Einsatz ergänzt. Die zugehörigen Arbeitsbögen sind im Anhang dieser Ausarbeitung beigefügt.

Insgesamt wurden im Rahmen dieser wissenschaftlichen Arbeit neun Lehr-Lern-Arrangements erstellt, die sich in drei Themenbereiche untergliedern. Jeder Unterabschnitt umfasst dabei drei Arbeitsbögen. Zunächst werden allgemeine funktionale Zusammenhänge betrachtet, ehe das Vorwissen der Schüler*innen zu proportionalen Zuordnungen aktiviert und um neue Inhalte erweitert wird. Abschließend werden diese Erkenntnisse und Betrachtungen genutzt, um lineare Funktionen einzuführen. Durch diesen fachlichen Aufbau soll vermieden werden, dass funktionale Zusammenhänge auf das mathematische Kalkül reduziert werden. Vielmehr greift der erste Abschnitt graphische Darstellungen aus zusammengesetzten linearen Funktionen auf und stellt diese in einen Sachzusammenhang. Ein anschaulicher und motivierender Einstieg erfolgt über lebensnahe Alltagserfahrungen sowie Aufgaben, die auf ein inhaltliches Verständnis abzielen und die Vorstellungen der Lernenden aktivieren. Der Funktionsbegriff wird in den ersten drei Arbeitsblättern durch die Abhängigkeitsbeziehungen von Füllhöhe und Zeit bzw. Füllhöhe und Volumen sowie Weg und Zeit intuitiv in vielfältigen Situationen erfahren. Die Beschreibung und Interpretation der Zusammenhänge bilden den Schwerpunkt dieses Unterabschnitts. Auf diesen inhaltlichen Deutungsmustern kann im zweiten Teil aufgebaut werden. Dazu werden „je-desto“-Aussagen wiederholt und das Wissen zu graphischen und tabellarischen

Darstellungen im proportionalen Kontext aktiviert. Der zugehörige Funktionsterm dieser Zuordnungen wird in Arbeitsblatt 04 (AB04) durch „eine einfache Verallgemeinerung“ (Vollrath, 1982, S. 7ff.) bei der Berechnung von Funktionswerten hergeleitet. Der Proportionalitätsfaktor wird dabei als zentrales Element der Funktionsgleichung identifiziert. Um lineare Funktionen sinnstiftend im Unterrichtsprozess einzuführen, wird der Proportionalitätsfaktor in AB05 und AB06 als Anstieg des Funktionsgraphen über geeignete Anstiegsdreiecke erfahren. Durch diese Bedeutungserweiterung und die unmittelbare Verknüpfung zwischen graphischer und symbolischer Ausdrucksweise kann eine erfolgreiche Herleitung linearer Abhängigkeiten in verschiedenen Darstellungen gelingen. Als einführendes Beispiel wird in AB07 die Weg-Zeit-Abhängigkeit des dritten Arbeitsblatts aufgegriffen und spezifiziert. Nachdem dieser Zusammenhang im proportionalen Rahmen untersucht wurde, erfolgt die Erweiterung auf den linearen Kontext durch anschauliche Vorstellungen und entsprechende Darstellungsverknüpfungen. Durch das Hinzufügen eines selbstgewählten Vorsprungs für eine Läuferin ergibt sich die zugehörige lineare Funktion als Verschiebung der proportionalen Zuordnung entlang der y-Achse (vgl. Abbildung 2).

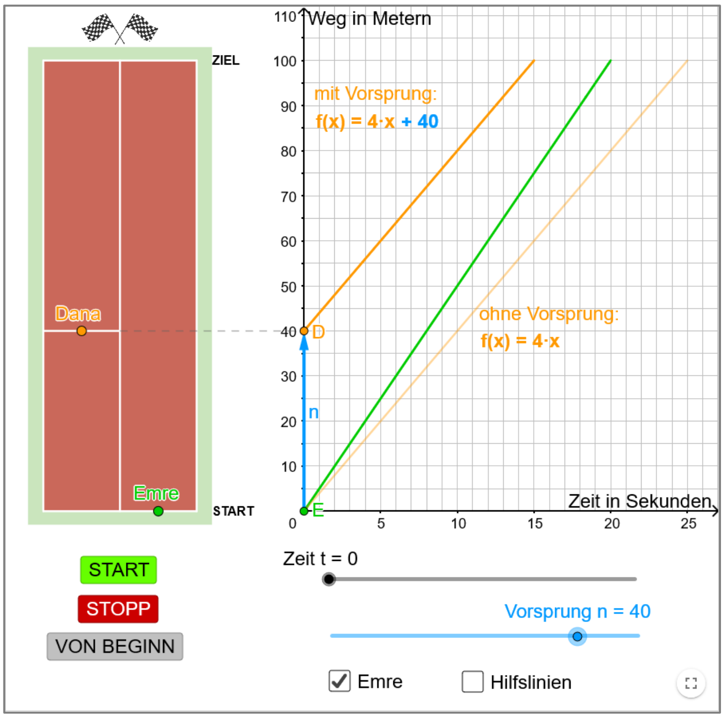



*Abbildung 2: Übergang von der proportionalen zur linearen Funktion (Eigene Darstellung)*

Der zugehörige Funktionsterm wird auch an dieser Stelle intuitiv nach dem Prinzip der Verallgemeinerung konstruiert. Die Vorkenntnisse zur Proportionalität tragen in Verbindung mit inhaltlichen Vorstellungen dazu bei, dass die Kompetenzen der Kinder lediglich um einzelne Aspekte ergänzt werden müssen. Durch analoge Betrachtungen bei Hinzunahme eines Rückstandes wird auch ein negativer y-Achsenabschnitt in den Lernprozess integriert. Eine passgenaue Übungsaufgabe festigt diese unmittelbare Relation zwischen Sachsituation, Graph und Funktionsgleichung. In AB08 werden diese Erkenntnisse innerhalb eines Ware-Preis-Zusammenhangs gesichert und durch Umkehraufgaben vertieft, ehe im letzten Arbeitsbogen auch eine negative Steigung in die Untersuchungen einbezogen wird. Dabei kann an das aufgebaute Vorwissen zum Anstieg in Verbindung mit Anstiegsdreiecken angeknüpft werden, sodass die Funktionsgleichung durch das Zusammenspiel aus Sachsituation und Funktionsgraphen zugänglich wird. Um vor allem den Anforderungen lernschwächerer Kinder gerecht zu werden, unterliegt das Material einer hohen fachlichen Strukturierung, welche die mathematischen Inhalte kleinschrittig aufbaut. Die Grundlage für die Einführung linearer Funktionen ergibt sich dabei aus inhaltlichen Vorüberlegungen sowie der funktionalen Auffassung proportionaler Zuordnungen.

Um den eigenständigen Lernprozess der Kinder im Homeschooling zu unterstützen, bedarf es neben einem gut durchdachten fachlichen Aufbau ebenso eine lernförderliche Aufbereitung der Materialien. Das Layout der A4-Bögen orientiert sich an einer Materialreihe, die im Rahmen einer wissenschaftlichen Arbeit im Jahr 2019 für die Carl-von-Ossietzky-Schule produziert wurde. Die Autorinnen erstellten ein Format, welches durch klar strukturierte Arbeitsaufträge und einheitliche Farb- und Gestaltungsrichtlinien im Präsenzunterricht überzeugen konnte. Für Überlegungen, die das Design und den Aufbau dieser Materialien betreffen, wird an dieser Stelle auf die angesprochene Staatsexamensarbeit verwiesen (vgl. Löffler & Rentsch, 2019, S. 49–52).

Gleichzeitig erfordern die veränderten Rahmenbedingungen des Distanzunterrichts eine adäquate Anpassung des bestehenden Konzepts. Die Arbeitsblätter wurden so erweitert, dass ein Wechselspiel zwischen analogen und digitalen Lernumgebungen ermöglicht wird. Der Kerngedanke besteht darin, den Schüler*innen weiterhin zunächst die A4-Arbeitsblätter als Ausdruck oder als PDF-Datei zu übermitteln. Diese Materialbögen bilden die Grundlage und strukturieren den eigenständigen Lernprozess der Kinder. Jede Aufgabenstellung ist hierbei mit einem Icon versehen, welches das Aufgabenformat des Abschnitts offenbart (vgl. Löffler & Rentsch, 2019, S. 50). Im Rahmen dieser Materialreihe werden die ursprünglichen Symbole um QR-Codes ergänzt, die von den Lernenden angeklickt oder gescannt werden können (vgl. Abbildung 3). Dadurch wird das analoge Lernangebot um digitale Online-Tools ergänzt, um den Kompetenzerwerb der Kinder auch im Fernunterricht effektiv zu fördern. Ziel ist es, durch Visualisierungen und zusätzliche Unterstützungsmöglichkeiten den Distanzunterricht möglichst kleinschrittig zu organisieren und den Schüler*innen so einen niedrigschwelligen Zugang zum Unterrichtsgegenstand zu ermöglichen. Dazu leiten die QR-Codes die Schüler*innen auf GeoGebra-Arbeitsblätter oder Inhalte der Website Learning-Apps weiter. Dort erhalten die Lernenden klare Instruktionen über den weiteren Unterrichtsablauf und werden an entsprechender Stelle aufgefordert zum klassischen Arbeitsblatt zurückzukehren. Durch die Integration von einführenden und zusammenfassenden Sektionen, Überleitungen, Hilfsangeboten und Feedbackmöglichkeiten soll die Struktur einer realen Unterrichtseinheit nachempfunden und die Abwesenheit der Lehrperson kompensiert werden. Das folgende Kapitel stellt den Aufbau der digitalen Lern-umgebungen vor und untersucht potentielle Chancen dieser Arrangements.

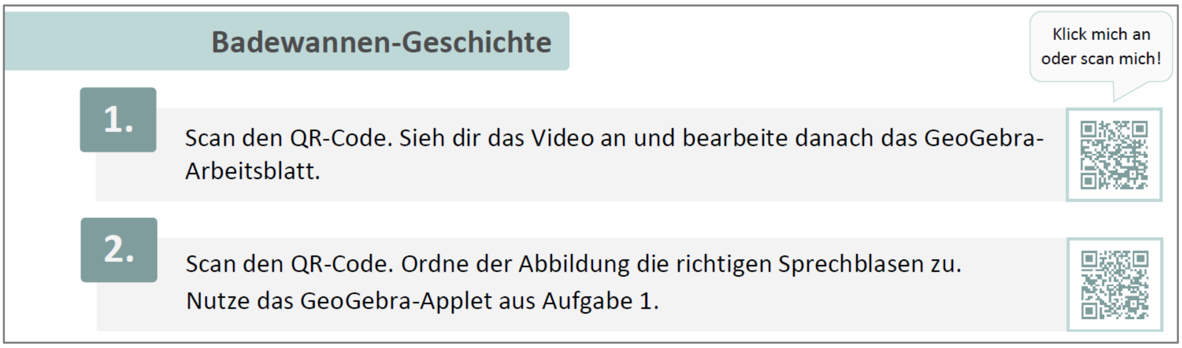



*Abbildung 3: Arbeitsblätter mit integrierten QR-Codes (Eigene Darstellung)*

### 5.3.2 Integration digitaler Lernumgebungen

Neben klassischen Arbeitsblättern, die den Schüler*innen in analoger oder digitaler Form zur Verfügung stehen, wurden Online-Lernangebote geschaffen, um den Anforderungen des Distanzunterrichts gerecht zu werden. Bei der Integration digitaler Lernarrangements gilt es, den Nutzen der jeweiligen Tools abzuwägen und sie an den Stellen im Unterrichtsprozess einzusetzen, an denen sich ein Mehrwert für die Lernenden ergibt. Dadurch soll eine an den Präsenzunterricht angelehnte, lernförderliche Strukturierung des Themenbereichs auch im Homeschooling eingerichtet werden. Gleichzeitig werden die individuellen Voraussetzungen der Lernenden in die Vorbereitung einbezogen.

Bei der Konzeption der Materialien wurde darauf geachtet, dass die Online-Inhalte auf jedem Endgerät anschaulich dargestellt werden können. Die verwendeten Websites passen sich an die zur Verfügung stehende Bildschirmgröße an und ermöglichen dadurch sowohl am PC als auch auf dem Smartphone oder Tablet eine übersichtliche Benutzeroberfläche. Somit wird zur Bearbeitung der Aufgaben lediglich ein (mobiles) Endgerät mit einer intakten Internetverbindung vorausgesetzt. Auf einen Drucker kann komplett verzichtet werden, da auch die Arbeitsblätter in digitaler Form übermittelt werden können. Weiterhin wurde Wert daraufgelegt, die digitalen Lernumgebungen sinnstiftend in das Konzept zu integrieren. Die Zahl der Online-Tools wurde dazu auf ein Minimum beschränkt, um die Lernenden nicht zu überreizen. Indem einzelne Plattformen immer wieder in den Arbeitsprozess integriert werden, sollen die Kinder Sicherheit im Umgang mit den verwendeten Tools und ihren jeweiligen Funktionen gewinnen. Nichtsdestotrotz schließt diese Herangehensweise eine abwechslungsreiche Aufgabenkultur nicht aus. Der Fokus der Materialreihe muss jedoch stets auf den Unterrichtsinhalten liegen, die durch die übermäßige und unstrukturierte Verwendung digitaler Werkzeuge nicht an Bedeutung verlieren dürfen. Allerdings kann der bewusste Medieneinsatz die Interaktivität des Unterrichtskonzepts erhöhen und die Schüler*innen für die Auseinandersetzung mit den Lerninhalten motivieren. Das Grundgerüst der digitalen Arrangements bilden interaktive GeoGebra-Arbeitsblätter. Diese bieten neben der Nutzung eigener Funktionen auch die Möglichkeit, externe Inhalte in die Lernumgebungen zu integrieren. Zusätzlich wurden Lernvideos und LearningApps erstellt, um den Lernprozess zu unterstützen. Zum Großteil sind diese unmittelbar in die GeoGebra-Umgebungen eingebunden, an einigen Stellen werden die LearningApps allerdings auch direkt durch die QR-Codes angesteuert. Aufgrund des Materialumfangs soll nicht jede im Rahmen dieser Arbeit geschaffene digitale Lernumgebung einzeln erläutert werden. Vielmehr geht es im Folgenden darum, grundlegende Überlegungen, die einerseits die verwendeten Tools und andererseits den strukturellen Gesamtaufbau betreffen, vorzustellen.

Bei GeoGebra handelt es sich um eine dynamische Geometriesoftware, die sich unter anderem zur Visualisierung und Simulation geometrischer Konstruktionen sowie funktionaler Zusammenhänge eignet. Diese Aktivitäten können zum einen separat geteilt und andererseits in sogenannte GeoGebra-Arbeitsblätter eingebunden werden. Dadurch werden die dynamischen Inhalte nicht nur lose wiedergegeben, sondern in einen direkten Zusammenhang gestellt, wodurch interaktive, vernetzende Lernumgebungen geschaffen werden können. Die Plattform selbst bietet neben der Integration der dynamischen Repräsentationen die Möglichkeit, YouTube-Videos und externe Websites über die zugehörige URL-Adresse einzubetten. Darüber hinaus können Texte, Bilder, Notizen, PDF-Dateien sowie Multiple-Choice-Fragen oder offene Fragestellungen in die Lernplattform integriert werden. Um die einzelnen Visualisierungen lernförderlich in Relation zu setzen, wurde für die vorliegende Materialreihe deshalb auf GeoGebra-Arbeitsblätter zurückgegriffen. Des Weiteren wurden diese Arbeitsblätter an einigen Stellen zu einem gesamten GeoGebra-Buch verknüpft. Der Unterschied hierin besteht lediglich im Umfang der verwendeten Elemente sowie in der dauerhaften Begleitung der Lernenden bei der Aufgabenbearbeitung. Hinsichtlich der logischen Struktur sowie der Vernetzung von analogen und digitalen Angeboten bestehen keine Abweichungen zwischen Buch und Arbeitsumgebung.

*GeoGebra* bietet ein großes Potenzial, verschiedene Elemente in das Lernangebot einzubeziehen sowie digitale Inhalte sinnvoll zu strukturieren. Der Aufbau der interaktiven Arbeitsblätter folgt einheitlichen Prinzipien und unterscheidet sich nur an ausgewählten Stellen. Unter der Überschrift erhalten die Kinder zunächst stets eine kurze Instruktion in Form kleiner Texte, welche die Motivation und Neugier der Schüler*innen wecken soll. In weiterführenden Arbeitsblättern wird zusätzlich das Vorverständnis der Lernenden aktiviert. Dazu werden Erkenntnisse aus vorherigen Arbeitsmaterialien zusammengefasst und Hinweise für das aktuelle GeoGebra-Applet angeführt. Darüber hinaus wird die Relevanz der jeweiligen Einheit für den Kompetenzerwerb offenbart. Durch einfache und verständliche Sätze soll allen Lernenden der Zugang zum Material ermöglicht werden.

Im Anschluss daran werden eigens produzierte YouTube-Videos integriert, die den Arbeitsprozess der Lernenden anleiten und in gewisser Weise steuern können. Ergänzend zum bestehenden Materialkonzept wurde dazu ein Thumbnail gestaltet, welches optisch vor dem Abspielen des Videos als Standbild zu sehen ist (vgl. Abbildung 4). Dieses fügt sich in das Layout der bestehenden Elemente ein und umfasst neben einem prägnanten Bild die Informationen zu Titel und Untertitel der Aufnahme. Alle Videos wurden in der Nachbereitung geschnitten und bearbeitet, um eine optimale Wiedergabe zu ermöglichen.


*Abbildung 4: Beispiel eines Einführungsvideos (Eigene Darstellung)*

Das Ziel dieser *Einführungsvideos*, die im Allgemeinen nicht länger als drei bis fünf Minuten dauern, ist der sichere Umgang mit der dynamischen GeoGebra-Repräsentation. In den Videos wird den Lernenden die Bedienung und die Funktionsweise der jeweiligen Applets aufgezeigt und erläutert. Nach dieser einleitenden Instruktion werden Hinweise für die Bearbeitung der zugehörigen Aufgabenstellungen beigefügt. Dadurch soll das Applet zielgerichtet zur Lösung der Schulaufgaben eingesetzt und von den Lernenden als effektives Hilfsmittel verstanden werden. Die Kinder können die Videos im Vorfeld anschauen und die Arbeitsaufträge unter Anleitung lösen. Aber auch während der Bearbeitung kann bei auftretenden Problemen auf die Clips zurückgegriffen werden. Zusätzlich werden die dargestellten Zusammenhänge in den Videos zum Teil als reales Experiment vorgeführt. Die Lernvideos dienen vielmehr dazu, die Komplexität des Unterrichtsgegenstands zu reduzieren und potentiellen Schwierigkeiten vorzubeugen. Leistungsstärkeren Schüler*innen hingegen ist es gestattet, Teile der Videos zu überspringen, um allen Partizipierenden einen angemessenen, individuellen Lernfortschritt zu ermöglichen.

Den Schwerpunkt der kognitiven Unterstützungsangebote bilden die einführenden *GeoGebra-Applets*, welche die funktionalen Zusammenhänge der Arbeitsblätter visualisieren. Die dynamischen Repräsentationen dienen als Basis zur Bearbeitung der Aufgaben auf den Arbeitsbögen oder als Hilfsmittel für sich anschließende Übungsphasen. Die Aktivitäten sind ähnlich aufgebaut, sodass im linken Teil stets die Situation modelliert und im rechten Abschnitt die zugehörige graphische Darstellung wiedergegeben wird (vgl. Abbildung 5).


*Abbildung 5: Beispiel eines dynamischen GeoGebra-Applets (Eigene Darstellung)*

Durch diese Vernetzung sollen die Lernenden bei der Interpretation des Funktionsgraphen hinsichtlich der Bedeutung des Monotonieverhaltens sowie ausgewählter Punkte unterstützt werden. Typische Fehlvorstellungen wie beispielsweise der „Graph-als-Bild“-Fehler werden durch diese zweiteilige Abbildung minimiert. In den Arbeitsumgebungen zur Einführung funktionaler Zusammenhänge wurden dazu Animationen erstellt, die zusammengesetzte lineare Abhängigkeiten veranschaulichen. Später werden die Darstellungen auf den proportionalen und linearen Kontext beschränkt. Aufgrund ihres dynamischen Charakters betonen die Repräsentationen vor allem den Kovariationsaspekt funktionaler Zusammenhänge. Um das Änderungsverhalten hervorzuheben, wird der Funktionsgraph in ausgewählten Beispielen nicht von Beginn an statisch präsentiert, sondern als Spur eines dynamischen Punktes parallel zur ablaufenden Situation erzeugt (vgl. Hohenwarter, o.A., S. 1). Über Start-Stopp-Buttons wird den Kindern die Gelegenheit gegeben, die Animation jederzeit anzuhalten und fortzusetzen sowie den Vorgang erneut von Beginn zu starten. Durch diese fortlaufende Entwicklung der graphischen Darstellung wird die Interpretation des fertigen Funktionsgraphen erleichtert (vgl. Winkelmann, 1988, S. 225) und das Verständnis des zugrunde liegenden Zusammenhangs vertieft. Gleichzeitig wird den Kindern durch die aufbereiteten Schaltflächen ein individuelles Lerntempo gestattet. Schieberegler können darüber hinaus ebenfalls zur Geschwindigkeitsregulierung der Animation genutzt werden. Sie bieten aber ebenso wie Auswahlboxen die Möglichkeit, das Applet anderweitig aktiv zu beeinflussen. Durch erstellte Parameter, die mit Variablen verknüpft sind, kann die

Sachsituation verändert und deren Auswirkung auf die graphische Darstellung untersucht werden. Beispielsweise können die Lernenden durch die Auswahl anderer Gefäße und die Veränderung der Glasbreite mit der Grafik interagieren, um den Zusammenhang zwischen der graphischen Darstellung und der Situation zu erfassen. Ähnliche Variationen der Sachkontexte sind auch in anderen Applikationen zu finden. Die dynamischen Lernumgebungen ersetzen experimentelle Untersuchungen funktionaler Zusammenhänge und ermöglichen durch die Interaktionsmöglichkeiten einen unmittelbaren Zugang über die Ebenen des EIS-Prinzips. Weiterhin können Anstieg und y-Achsenabschnitt durch den Einsatz von Schiebereglern direkt beeinflusst werden. Manipulationen dieser Parameter lassen sich durch die Verknüpfung der Darstellungsarten simultan im Funktionsterm, im Graph und in der Situation beobachten (vgl. Müller-Philipp, 1994, S. 94). Der Einsatz von Schiebereglern eignet sich somit auch für globale Betrachtungen der Funktion als Ganzes. Diese Vorgehensweise soll nicht nur die Begriffsbildung fördern, sondern die Schüler*innen gleichzeitig in Bezug auf Routineaufgaben entlasten und den Fokus auf die eigentlich zu lösenden Probleme lenken (vgl. Müller-Philipp, 1994, S. 94). Die Applets reduzieren die Komplexität auch dadurch, dass mögliche Unterstützungsangebote, wie beispielsweise Anstiegsdreiecke oder Hilfslinien bei Bedarf eingeblendet werden können.

Jene Unterrichtsinhalte, die mithilfe der Applets sowie der analogen Arbeitsaufträge zu erarbeiten sind, werden im Anschluss daran gesichert und an ausgewählten Stellen vertieft. Die einfachste Möglichkeit bilden hierfür unmittelbar in GeoGebra erzeugte *Multiple-Choice-Aufgaben* sowie *offene Fragestellungen* (vgl. Abbildung 6).

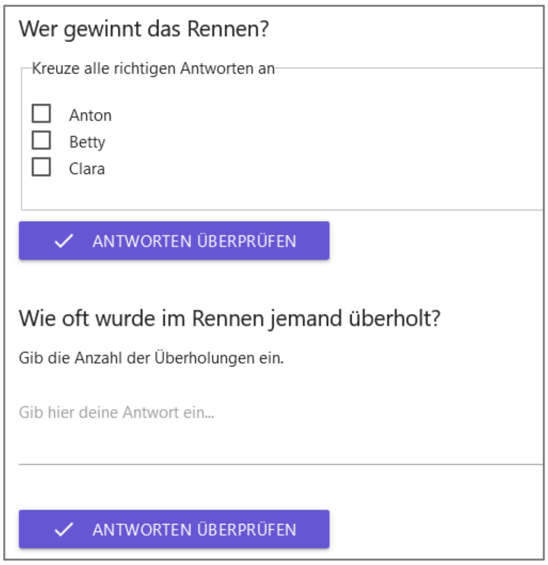



*Abbildung 6: Beispiel der Nutzung des Frage-Tools in GeoGebra (Eigene Darstellung)*

Dadurch kann das Verständnis für den funktionalen Zusammenhang überprüft werden, wobei die Lernenden eine unmittelbare Rückmeldung über ihren Fortschritt erhalten. Auftretende Defizite können im Anschluss durch die Wiederholung einzelner Abschnitte ausgeglichen werden. Zum anderen bietet GeoGebra die Chance, interaktive Übungen zu programmieren. Abbildung 7 zeigt diesbezüglich ein Applet, welches die Schüler*innen auffordert, den Anstieg sowie den y-Achsenabschnitt einer linearen Funktion aus dem Graphen abzulesen und in die dafür vorgesehenen Kästchen einzutragen. Die Lernenden sind in der Verantwortung, ihre Kompetenzen selbstständig einzuschätzen und die angebotenen Hilfestellungen bei Bedarf zu aktivieren. Das Programm beurteilt die eingegebenen Werte und gibt den Kindern eine kurze Rückmeldung zu deren Korrektheit. Über eine Schaltfläche kann eine neue Darstellung generiert werden, sodass die Aufgabenformate beliebig oft wiederholt werden können. Je nach Bedarf wird der zu bearbeitende Aufgabenumfang von den Kindern eigenständig festgelegt, wodurch eine weitere Individualisierung des Lernprozesses stattfindet. Weitere Übungsapplets in GeoGebra sind ähnlich konzipiert und werden für die Teilnehmenden in den zugehörigen Einführungsvideos erläutert.

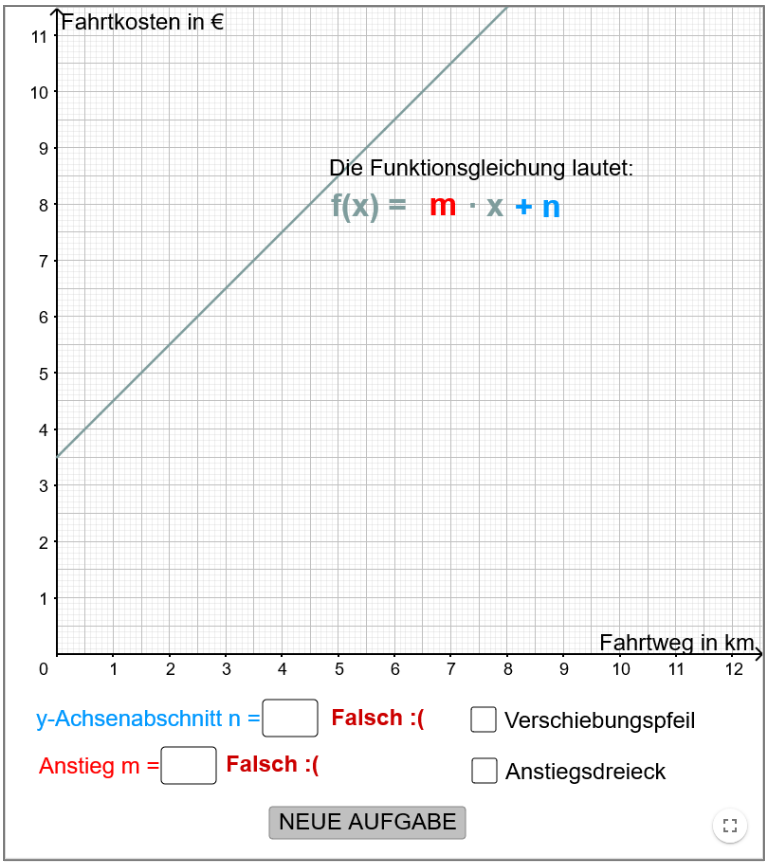



*Abbildung 7: Beispiel einer interaktiven GeoGebra-Übung (Eigene Darstellung)*

Da GeoGebra die Einbettung externer Inhalte erlaubt, wurden *LearningApps* in die digitalen Arbeitsblätter integriert. Teilweise werden diese auch separat über die QR-Codes verlinkt, in jedem Fall erfolgt jedoch eine nahtlose Integration in das Gesamtkonzept. Dabei handelt es sich um eine Website, die vielfältige interaktive Aufgabenformate bereithält. Die Bedienung der einzelnen Apps ist leicht verständlich, wird jedoch zusätzlich in den Einführungsvideos angerissen. Die Angebote fügen sich unmittelbar in den Lernprozess ein, sodass die bereitgestellten GeoGebra-Applets zur Bearbeitung der Online-Übungen herangezogen werden können. Lückentexte, bei denen Rechenwege oder Erklärungen ergänzt werden, stellen einen Weg zur Festigung der Lerninhalte dar. Der Vorteil besteht hierbei darin, dass mehrere richtige Lösungen in die App integriert werden können, was die Hinterlegung synonymer Antwortoptionen ermöglicht. Des Weiteren wurden die LearningApps „Paare zuordnen", „Gruppenzuordnung" und „Zuordnung auf Bild" eingebettet. Erstere wird etwa genutzt, um Zuordnungsaufgaben zwischen dem Funktionsterm und der passenden graphischen Darstellung zu erzeugen (vgl. Abbildung 8). Die einzelnen Bilder können per Klick in einer vergrößerten Ansicht inspiziert werden. Zudem sind die Zuordnungen während der Bearbeitung beliebig oft veränderbar.

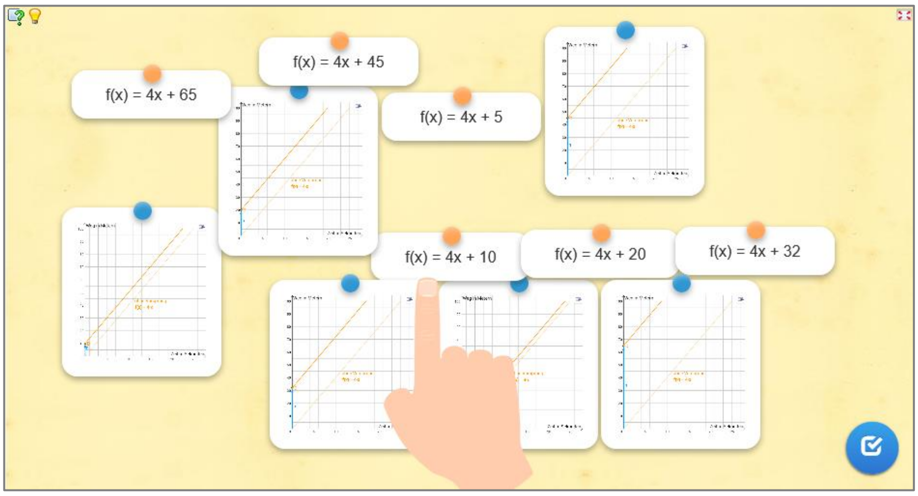



*Abbildung 8: Beispiel der LearningApp "Paare zuordnen" (Eigene Darstellung)*

Bei der zweitgenannten Applikation erscheinen nacheinander kleine Karten, die Grafiken, Formeln oder Situationsbeschreibungen enthalten. Die Kinder müssen entscheiden, zu welcher Kategorie die jeweilige Aussage passt, um das Objekt im Anschluss per Maus- oder Touchbefehl zu verschieben. Verwendet wurde in diesem Rahmen häufig eine Einteilung zwischen wahren und falschen Aussagen (vgl. Abbildung 9), wobei auch alternative Gruppenkonstellationen programmiert werden können.

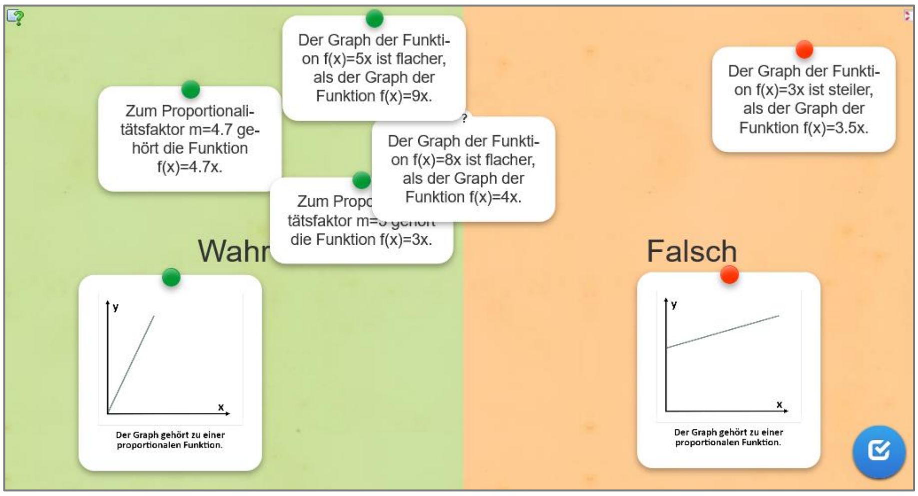



*Abbildung 9: Beispiel der LearningApp „Gruppenzuordnung" (Eigene Darstellung)*

Das zuletzt aufgezählte Übungsformat offenbart eine Grafik, auf der verschiedene Stellen mit einer Markierung versehen sind. Die Lernenden wählen eine Pinnnadel aus und ordnen der gekennzeichneten Stelle die passende Beschreibung zu. Genutzt wurde dieses Programm im Rahmen des vorliegenden Materials, um die graphische Darstellung einer abschnittsweise definierten Funktion zu interpretieren (vgl. Abbildung 10).

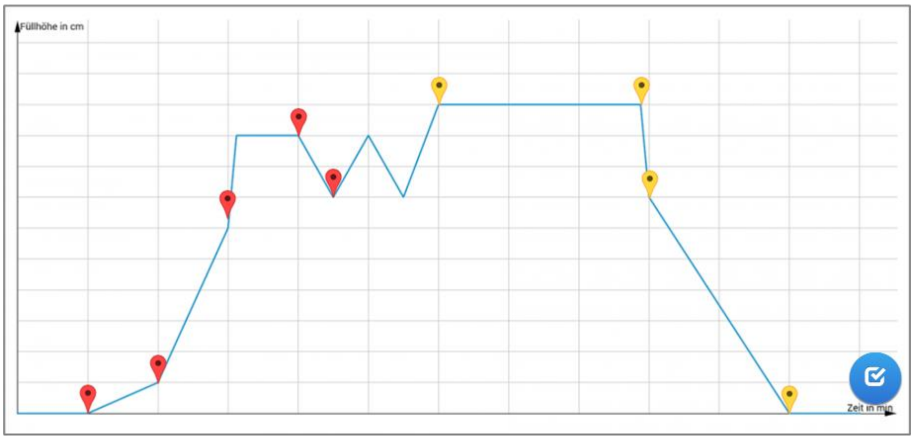



*Abbildung 10: Beispiel der LearningApp "Paare zuordnen" (Eigene Darstellung)*

Durch die vorgestellten Aufgabenvariationen soll eine spielerische Auseinandersetzung mit den mathematischen Inhalten angeregt werden. Über den blauen Haken besitzen die Kinder diesbezüglich die Möglichkeit, ihre Ergebnisse der einzelnen LearningApps selbstständig zu überprüfen. Die Schüler*innen erhalten somit auch in dieser Übungsform eine unmittelbare Rückmeldung über den eigenen Lernfortschritt.

Den Abschluss der digitalen Lernumgebungen bilden erneut kurze Lernvideos, die eine Sicherungsfunktion im Unterrichtsprozess einnehmen. Diese greifen das GeoGebra-Applet auf und schildern die Beobachtungen und Erkenntnisse, welche die Schüler*innen aus der

Anwendung gewonnen haben sollten. Neben den Applets werden zum Teil auch Abschnitte der analogen Arbeitsblätter aufgezeichnet. Die erneute Videoaufnahme dient der Beseitigung aufgetretener Unklarheiten sowie der Dokumentation des Wissens- und Kompetenzerwerbs der Lernenden. Auf diese Weise werden neue Inhalte durch die Wiederholung wesentlicher Informationen prägnant zusammengefasst. Sofern die Videos zwischen den GeoGebra-Applets und den Übungen eingebettet sind, werden die Schüler*innen auch zur selbständigen Bearbeitung der Online-Aufgaben angeregt. Im Anschluss an den Kurzfilm folgt ein Hinweis darüber, wie der Lernprozess fortzusetzen ist.

Die Vorstellung der digitalen Arrangements zielt darauf ab, fundamentale Überlegungen bei der Umsetzung des Materialsets nachvollziehbar darzulegen. Kleinere Variationen innerhalb der konzeptionellen Anlage der einzelnen Arbeitsmaterialien ergeben sich aufgrund der unterschiedlichen Komplexität der jeweiligen Lernziele. Vielmehr verdeutlichen die Ausführungen jedoch die Kernidee der vorliegenden Materialreihe, die darin besteht, eine hohe Vernetzung zwischen analogen und digitalen Angeboten zu gewährleisten. Einzelne multimediale Tools dürfen nicht zusammenhanglos unter dem Vorwand der Digitalisierung gebraucht werden, sondern müssen letztlich ein aufeinander aufbauendes, ganzheitliches Gerüst ergeben. Erst dadurch sind die vorliegenden Lehr-Lern-Arrangements in der Lage, die Kinder bei der Auseinandersetzung mit funktionalen Zusammenhängen zu unterstützen. Insbesondere die kleinschrittige Abfolge der fachlichen Inhalte sowie die Integration dynamischer Repräsentationen ermöglichen allen Schüler*innen einen angemessenen und individuellen Lernprozess.

# 6 Fazit

Die Herausforderungen, mit denen die Lernenden durch die Schulschließungen der vergangenen Monate konfrontiert wurden, sind immens. Bundesweit sind gegenwärtig noch immer viele Schüler*innen gezwungen, sich den Unterrichtsstoff im eigenen Kinderzimmer selbstständig zu erarbeiten. Mit welcher Qualität der Distanzunterricht in der Praxis organisiert und umgesetzt wird, hängt sowohl von der Bildungseinrichtung als auch von der jeweiligen Lehrperson ab. Pandemiebedingte Wissens- und Kompetenzdefizite werden erst in den folgenden Schuljahren offenbart und dennoch lassen sich erste Auswirkungen des Homeschoolings bereits zum jetzigen Zeitpunkt abschätzen. Oft gelingt es den digitalen Unterrichtsmaterialien nicht, die Abstinenz der Lehrperson durch alternative Maßnahmen zu kompensieren. Tausende Schüler*innen zählen damit zu den Leidtragenden der Pandemie, indem ihnen durch unzureichende Bildungsangebote echte Zukunftschancen genommen werden. Besonders in heterogenen Klassenverbänden, in denen die Lernmotivation, das Lernverhalten und das Leistungsvermögen der Teilnehmenden stark variiert, sind an die Situation des Homeschoolings angepasste Lehr-Lern-Arrangements essentiell, um die Verstärkung bestehender Unterschiede zu vermeiden. Die vorliegende Ausarbeitung hat sich der aktuellen Situation des Fernunterrichts angenommen und untersucht, wie der Themenbereich „Lineare Funktionen“ erfolgreich gelehrt werden kann. Es wurde verdeutlicht, dass entsprechende Arbeitsmaterialien autonomes Lernen effektiv fördern müssen. Dies verlangt neben einer hohen fachlichen und formalen Struktur innovative Lernumgebungen, die einen lebendigen Kompetenzerwerb ermöglichen.

Hierzu wurden zentrale Aspekte, welche der Lehre der Leitidee „Funktionaler Zusammenhang“ zugrunde liegen, zusammengetragen und um didaktische Überlegungen zu linearen Abhängigkeitsbeziehungen ergänzt. Der geschichtliche Exkurs machte deutlich, dass der Funktionsbegriff in seiner Fülle nicht als fertiges Objekt, sondern als Resultat einer aktiven Auseinandersetzung mit der Mathematik verstanden werden muss. Die statische Präsentation einer fertigen Definition würde nicht nur die historische Entwicklung auf den Kopf stellen, sondern auch die Ausbildung vielfältiger Kompetenzen erschweren. Vielmehr muss den Lernenden ein angemessener Zugang zur abstrakten Welt funktionaler Betrachtungen gestattet werden. Lebensnahe Alltagskontexte bieten eine Möglichkeit, ein inhaltliches Verständnis für Abhängigkeitsbeziehungen zwischen Größen aufzubauen. Es gilt, einen speziellen gedanklichen Umgang mit funktionalen Zusammenhängen zu fördern, der nicht durch strikt kalkülhafte Untersuchungen erreicht werden kann. Vielmehr sollen die Schüler*innen dazu befähigt werden, Funktionen in unterschiedlichen Situationen erfassen, beschreiben und analysieren zu können. Neben dem statischen Zuordnungscharakter muss diesbezüglich auch der dynamische Kovariations- sowie der Objektaspekt funktionaler Zusammenhänge aufgegriffen werden. Neben diesen unterschiedlichen Perspektiven, die es aufzuzeigen gilt, verlangt der Lernbereich von den Kindern eine sichere Handhabung der Ausdrucksmittel Situationsbeschreibung, Tabelle, Graph und Funktionsgleichung. Aufgabenstellungen, die unterschiedliche Darstellungswechsel zur Lösung außer- und innermathematischer Probleme einfordern, sind für einen kompetenzorientierten Unterricht unerlässlich. Für ein inhaltliches Verständnis der vorliegenden Relationen ist die Verbindung zur Sachsituation ein elementarer Bestandteil der erteilten Arbeitsaufträge. Der Lernprozess wurde dahingehend so strukturiert, dass bei der Bearbeitung zunächst allgemeine funktionale Zusammenhänge untersucht werden. Erst im Anschluss daran wird das Vorwissen zur Proportionalität aktiviert und um den zugehörigen Funktionsterm erweitert. Im Sinne des Lernens durch Erweiterung können lineare Funktionen daran anknüpfend intuitiv in verschiedenen Darstellungsformen eingeführt werden. Dieser fachliche Aufbau folgt den Überlegungen, dem mathematischen Kalkül eine propädeutische Phase vorzuschalten. Gleichwohl können bestehende Konzepte im Sinne des Spiralprinzips sinnhaft um neue Inhalte ergänzt werden.

Schließlich wurde untersucht, wie die umfangreichen Aspekte, die es bei der Aufbereitung des Themenbereichs zu beachten gilt, in einem lernförderlichen Unterrichtsszenario vereint werden können. Es wurde versucht, den didaktischen Aufbau einer Präsenzunterrichtseinheit zu adaptieren und durch eine geeignete Aneinanderreihung analoger und digitaler Angebote zu strukturieren. Einerseits kann der sinnstiftende Einsatz multimedialer Anwendungen den Wissens- und Kompetenzerwerb der Kinder nachhaltig unterstützen. Zum anderen bietet sich durch die Integration interaktiver Lernumgebungen jedoch auch die Chance, die Lernbereitschaft der Kinder positiv zu beeinflussen. Mithilfe von GeoGebra-Applets, LearningApps und Lernvideos erhalten die Schüler*innen bei der Erarbeitung mathematischer Inhalte passgenaue Hilfestellungen.

Indem die Sachsituationen in GeoGebra-Modellierungen unmittelbar mit den graphischen Darstellungen vernetzt werden, kann potentiellen Lernschwierigkeiten entscheidend vorgebeugt werden. Durch die dargebotenen Computersimulationen setzen sich die Lernenden aktiv mit dem dynamischen Aspekt funktionaler Zusammenhänge auseinander. Die Lernvideos stellen diesbezüglich zusätzliche Hilfsangebote dar, auf die bei der Bearbeitung der Aufgaben fortlaufend zurückgegriffen werden kann. LearningApps und interaktive Übungen in GeoGebra verdeutlichen darüber hinaus, dass digitale Lehr-Lern-Arrangements genutzt werden können, um abwechslungsreiche Übungsformate mit unmittelbarer Feedbackfunktion zu kreieren. Durch die Vernetzung der einzelnen Bausteine, die um einführende Instruktionen, gedankliche Überleitungen und prägnante Zusammenfassungen ergänzt wurden, ergibt sich letztlich ein ganzheitliches Selbstlernangebot. Auch wenn es nahezu unmöglich ist, die vielfältigen Facetten des Präsenzunterrichts vollständig zu kompensieren, wurde mit dieser Materialreihe ein tragfähiges Konzept entwickelt, welches sich an den Anforderungen des Distanzunterrichts orientiert. Differenzierende Maßnahmen sollen die Komplexität im Umgang mit Funktionen reduzieren und dadurch allen Schüler*innen einen individuellen Lernprozess ermöglichen. Aufgrund des niedrigschwelligen Zugangs zur Mathematik, der durch einen direkten Lebensweltbezug ermöglicht wird, eignen sich Ausschnitte der Arbeitsumgebungen auch dazu, die Lehrqualität des Präsenzunterrichts zu erhöhen.

## Literaturverzeichnis

Altrichter, V. (2017). *Mathematik - berufliche Oberschule Bayern* (1. Auflage). Berlin: Cornelsen.

Barr, G. (1981). Some Students Ideas on the Concept of Gradient. *Mathematics in School*, *10*(1), 14–17.

BearingPoint. (2020). *Home Schooling – die Chance für das digitale Bildungswesen. Studienergebnisse von BearingPoint*. Zugriff am 04.04.2021. Verfügbar unter: https://www.bearingpoint.com/files/BearingPoint_Studie_Digitales_Lernen_2020.pdf

Braun, A. (2021). *OECD-Studie: Das Virus bremst die Bildung weltweit aus*. Zugriff am 19.04.2021. Verfügbar unter: https://www.swr.de/wissen/oecd-studie-schule-in-corona-zeiten-100.html

Bruder, R. (2020). *Bleib dran im Homeschooling*. Zugriff am 30.03.2021. Verfügbar unter: https://www.friedrich-verlag.de/mathematik/konzepte-methoden/bleib-dran-im-homeschooling-4776

Bruder, R. & Reibold, J. (2010). *Weil jeder anders lernt. Ein alltagstaugliches Konzept zur Binnendifferenzierung*. Zugriff am 12.03.2021. Verfügbar unter: https://www.friedrich-verlag.de/mathematik/konzepte-methoden/weil-jeder-anders-lernt-109

Bruner, J. (1970). *Der Prozess der Erziehung*. Düsseldorf: Schwann.

Büchter, A. (2008). Funktionale Zusammenhänge erkunden. *Mathematik lehren*, (148), 4–10.

Dedekind, R. (1911). *Was sind und was sollen die Zahlen?* Braunschweig: Bieweg.

Fischer, G. (2010). *Lineare Algebra. Eine Einführung für Studienanfänger* (Grundkurs Mathematik, 17., aktualisierte Auflage). Wiesbaden: Vieweg + Teubner.

Glaubitz, J., Rademacher, D. & Sonar, T. (2019). *Lernbuch Analysis 1. Das Wichtigste ausführlich für Bachelor und Lehramt* (Springer eBooks Life Science and Basic Disciplines). Wiesbaden: Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-658-26937-1

Griesel, H., Postel, H. & vom Hofe, R. (Hrsg.). (2006). *Mathematik heute* (Mittelschule Sachsen, Realschulbildungsgang, Dr. A 1). Braunschweig: Schroedel.

Herget, W. (2013). Funktionen - immer gut für eine Überraschung. In H. Allmendinger, K. Lengnink, A. Vohns & G. Wickel (Hrsg.), *Mathematik verständlich unterrichten. Perspektiven für Unterricht und Lehrerbildung* (S. 47–61). Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden.

Herscovics, N. (1982). Problems Related to the Understanding of Functions. In G. van Barneveld & H. Krabbendam (Hrsg.), *Proceedings of the Conference on Functions, organized by the Foundation for Curriculum Development* (S. 67–84). Enschede: o.A.

Hoffkamp, A. (2017a). *Aufbauendes fachliches Lernen in heterogenen Klassen*. Zugriff am 06.04.2021. Verfügbar unter: https://tu-dresden.de/mn/math/analysis/didaktik/ressourcen/dateien/dateien/publikationen/BzMU17_HOFFKAMP_Heterogenitaet.pdf?lang=de

Hoffkamp, A. (2017b). Studierende in Schulentwicklungsprozesse einbinden. In J. Leuders, T. Leuders, S. Prediger & S. Ruwisch (Hrsg.), *Mit Heterogenität im Mathematikunterricht umgehen lernen. Konzepte und Perspektiven für eine zentrale Anforderung an die Lehrerbildung* (Bd. 5). Wiesbaden: Springer Spektrum. Verfügbar unter: 157-166

Hoffkamp, A. & Kaliski, J. (2017). Prozente im Wechselspiel von Vernetzung und Vereinfachung. *Mathematik lehren*, (200), 19–24.

Hohenwarter, M. (o.A.). *Dynamische Funktionen mit GeoGebra*. Zugriff am 14.04.2021. Verfügbar unter: https://docplayer.org/53006893-Dynamische-funktionen-mit-geogebra.html

Humenberger, H. & Schuppar, B. (2019). *Mit Funktionen Zusammenhänge und Veränderungen beschreiben* (Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II). Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-662-58062-2

Jansen, P. (2008). Frühe Wege zu Funktionen. Erfahrungen aus der Grundschule nutzen. *Mathematik lehren*, (148), 12–15.

Jungblut, M. (2021). *Chronologie eines Schuljahrs in der Coronakrise*. Zugriff am 19.04.2021. Verfügbar unter: https://www.deutschlandfunk.de/rueckblick-2020-chronologie-eines-schuljahrs-in-der.680.de.html?dram:article_id=489919

Kerslake, D. (1982). Graphs. In K. Hart (Hrsg.), *Children's Understanding of Mathematics: 11 - 16* (S. 120–136). London: John Murray Ltd.

Kirsch, A. (1969). Eine Analyse der sogenannten Schlußrechnung. *MPhSB*, *16*, 41–55.

Klein, F. (1924). *Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus* (1 Band). Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer.

Kronfellner, M. (1987). Ein genetischer Zugang zum Funktionsbegriff. *Mathematica Didactica*, *10*(1), 81–100.

Kronfellner, M. (1998). *Historische Aspekte im Mathematikunterricht*. Zugriff am 04.11.2020. Verfügbar unter: https://docplayer.org/74329034-1-aus-kronfellner-m-historische-aspekte-im-mathematikunterricht-hpt-wien-1998.html

Kultusministerkonferenz. (2004). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss. Beschluss vom 4.12.2003*. München: Wolters Kluwer.

Kultusministerkonferenz. (2005). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich. Beschluss vom 15.10.2004*. München: Wolters Kluwer.

Laakmann, H. (2013). *Darstellungen und Darstellungswechsel als Mittel zur Begriffsbildung. Eine Untersuchung in rechnerunterstützten Lernumgebungen* (Springer eBook Collection, Bd. 11). Wiesbaden: Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-658-01592-3

Lambert, A. & Herget, W. (2017). *Die Suche nach dem springenden Punkt*. Zugriff am 12.03.2021. Verfügbar unter: https://www.friedrich-verlag.de/mathematik/konzepte-methoden/die-suche-nach-dem-springenden-punkt-38

Leinhardt, G., Zaslavsky, O. & Stein, M. K. (1990). Functions, Graphs, and Graphing; Tasks, Learning, and Teaching. *Reviews of Educational Research*, *60*(1), 1–64.

Leuders, T. & Prediger, S. (2005). Funktioniert's? - Denken in Funktionen. *Praxis der Mathematik in der Schule*, *47*(2), 1–7.

Löffler, E. & Rentsch, S. (2019). *Mathematikunterricht in heterogenen Lerngruppen: Curriculums- und Materialentwicklung für binnendifferenziertes Lernen*.

Malle, G. (1993). *Didaktische Probleme der elementaren Algebra. Mit vielen Beispielaufgaben* (Didaktik der Mathematik). Wiesbaden: Vieweg.

Markovits, Z., Eylon, B. S. & Bruckheimer, M. (1986). Functions Today and Yesterday. *For the Learning of Mathematics*, *6*(2), 18–24.

Müller-Philipp, S. (1994). *Der Funktionsbegriff im Mathematikunterricht. Eine Analyse für die Sekundarstufe I unter Berücksichtigung lernpsychologischer Erkenntnisse und der Einbeziehung des Computers als Lernhilfe* (Internationale Hochschulschriften). Zugl.: Münster (Westfalen), Univ., Diss., 1993. Münster, New York: Waxmann.

Oehl, W. (1965). *Der Rechenunterricht in der Hauptschule*. Hannover: Schroedel.

Rolfes, T. (2018). *Funktionales Denken. Empirische Ergebnisse zum Einfluss von statischen und dynamischen Repräsentationen*. Wiesbaden: Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-658-22536-0

Roth, J. (o. J.). *Didaktik der Algebra. Modul 5*. Zugriff am 05.11.2020. Verfügbar unter: https://www.juergen-roth.de/lehre/skripte/did_algebra/did_algebra_3_funktionen.pdf

Roth, J. & Stiller, H.-S. (2016). Bestand und Änderung. Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. *Mathematik lehren*, (199), 2–9.

Sächsisches Staatsministerium für Kultus. (2019a). *Lehrplan Oberschule. Mathematik*. Zugriff am 10.03.2021. Verfügbar unter: https://www.schule.sachsen.de/lpdb/web/downloads/lp_ms_mathematik_2009.pdf?v2

Sächsisches Staatsministerium für Kultus. (2019b). *Lehrplan Oberschule. Physik*. Zugriff am 10.03.2021. Verfügbar unter: http://lpdb.schule-sachsen.de/lpdb/web/downloads/54_lp_os_physik_2019.pdf?v2

Sächsisches Staatsministerium für Kultus. (2021). *Kultusministerium legt Plan zur Bewältigung von Lerndefizite vor*. Zugriff am 19.04.2021. Verfügbar unter: https://www.medienservice.sachsen.de/medien/news/250304

Scheibke, N. (2016). *Basiswissen Mathematik. Mathematik der Oberstufe*. Zugriff am 05.11.2020. Verfügbar unter: https://www.uni-due.de/imperia/md/content/mint/skriptum_mo.pdf

Senatsverwaltung für Bildung, Jugend und Familie. (2019). *Bericht zur Inspektion der Carl-von-Ossietzky-Schule 02K02 (Gemeinschaftsschule)*. Zugriff am 12.03.2021. Verfügbar unter: https://www.cvo-berlin.de/fileadmin/user_upload/carl_von_ossietzky_schule/neuigkeiten_termine/schulinspektion/Bericht_02K02.pdf

Strunz, K. (1949). Das funktionale Denken in der Mathematik. *Studium generale*, *2*, 31–37.

Tall, D. *The Transition to Advanced Mathematical Thinking: Functions, Limits, Infinity and Proof*. Zugriff am 14.03.2021. Verfügbar unter: https://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1992e-trans-to-amt.pdf

Thomas, H. L. (1975). The Concept of Function. In M. F. Rosskopf (Hrsg.), *Children's Mathematical Concepts. Six Piagetian Studies in Mathematics Education* (S. 145–172). New York: Teachers Colleg.

Vinner, S. (1983). Concept Definition, Concept Image and the Notion of Function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *14*(3), 293–305.

Vinner, S. & Dreyfus, T. (1989). Images and Definitions for the Concept of Function. *Journal for Research in Mathematics Education*, *20*(4), 356–366.

Vollrath, H.-J. (1982). Funktionsbetrachtungen als Ansatz zum Mathematisieren in der Algebra. *Der Mathematikunterricht*, *28*(3), 5–27.

Vollrath, H.-J. (1989). Funktionales Denken. *Journal für Mathematikdidaktik*, *10*(1), 1–43.

Vollrath, H.-J. & Weigand, H.-G. (2007). *Algebra in der Sekundarstufe* (Mathematik Primar- und Sekundarstufe, 3.). Heidelberg: Elsevier Spektrum. Verfügbar unter: http://swbplus.bsz-bw.de/bsz259332585cov.htm

Voß, S. (2018). *Im digitalen Zeitalter qualitätsorientiert lernen. Chancen und Grenzen digitaler Medien*. Zugriff am 30.03.2021. Verfügbar unter: https://www.schule-bw.de/themen-und-impulse/uebergreifende-erziehung/medienerziehung/handreichungen/basisband/handreichung-im-digitalen-zeitalter-qualitaetsorientiert-lernen-dl-01.pdf

Weigand, H.-G. (o. J.). *Didaktische Prinzipien*. Zugriff am 03.11.2020. Verfügbar unter: https://www.mathematik.uni-wuerzburg.de/fileadmin/10040500/dokumente/Texte_zu_Grundfragen/weigand_didaktische_prinzipien.pdf

Winkelmann, B. (1988). Funktionskonzepte in der Interaktion zwischen Benutzer/Lernendem und Rechner in mathematischer Unterrichts- und Anwendersoftware. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *20*(5), 222–228.

# Anhang

## Unterrichtsmaterial „Lineare Funktionen“

Auf den folgenden Seiten wird das Selbstlernmaterial, welches im Rahmen dieser wissenschaftlichen Arbeit als praktische Leistung erarbeitet wurde, zusammengestellt. Die Arbeitsblätter aktivieren das Vorwissen der Lernenden und führen anschließend in den Lernbereich „Lineare Funktionen“ ein. Aus dem theoriebasierten Teil dieser Arbeit ergibt sich folgender struktureller Aufbau:

**Teil 1: Einführung funktionaler Zusammenhänge**

- **AB01**: Badewannen-Geschichte
- **AB02**: Gefäße haben viele Gesichter
- **AB03**: 400-Meter-Lauf

**Teil 2: Proportionale Zuordnungen**

- **AB04**: Verschiedene Trinkgläser
- **AB05**: Verschiedene Quadrate
- **AB06**: Übung Anstiegsdreieck

**Teil 3: Lineare Funktionen**

- **AB07**: 100-Meter-Lauf
- **AB08**: Taxifahrt
- **AB09**: Wir ziehen den Stöpsel

**Name:** ..................................................... **Klasse:** ........................... **Datum:** ................................

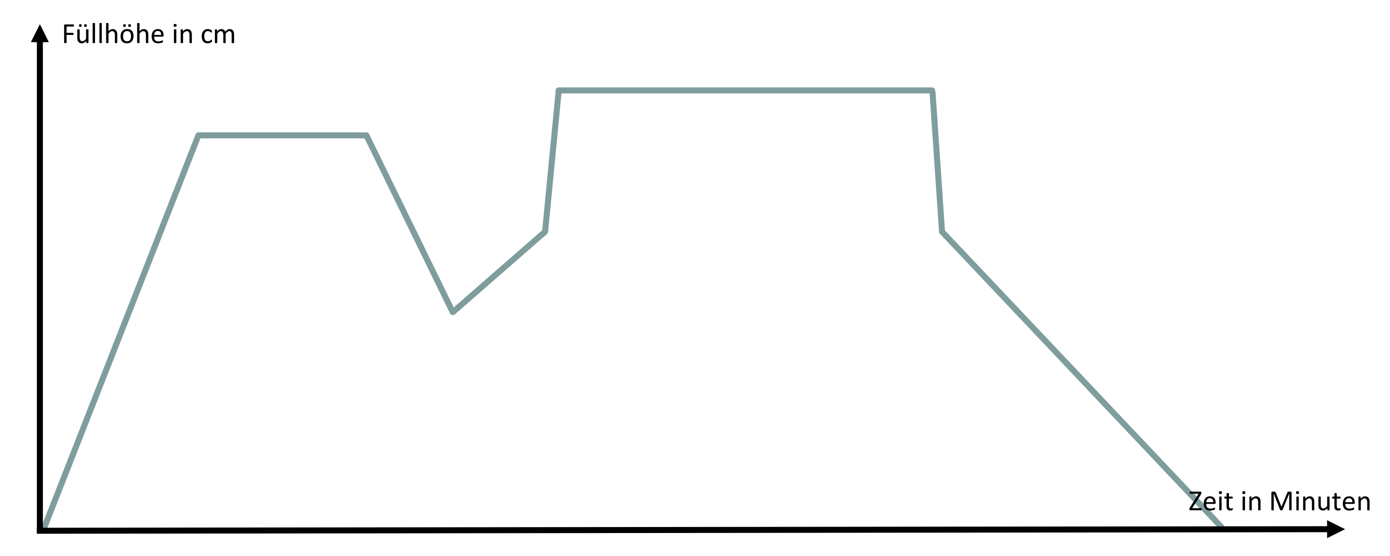
## Badewannen-Geschichte

Klick mich an
oder scan mich!

**1.** Scan den QR-Code. Sieh dir das Video an und bearbeite danach das GeoGebra-Arbeitsblatt.

**2.** Scan den QR-Code. Ordne der Abbildung die richtigen Sprechblasen zu. Nutze das GeoGebra-Applet aus Aufgabe 1.

* **3.** Schreibe nun selbst eine kurze Badewannen-Geschichte zum unten abgebildeten Graphen. Was könnte passiert sein?




________________________________________________________________________

________________________________________________________________________

________________________________________________________________________

________________________________________________________________________

________________________________________________________________________

________________________________________________________________________

________________________________________________________________________

________________________________________________________________________

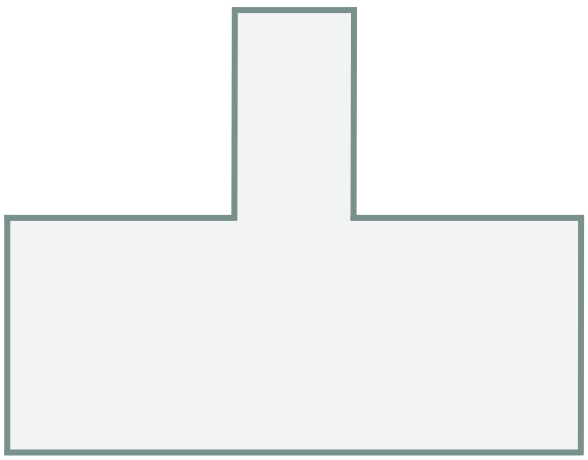
## Gefäße haben viele Gesichter

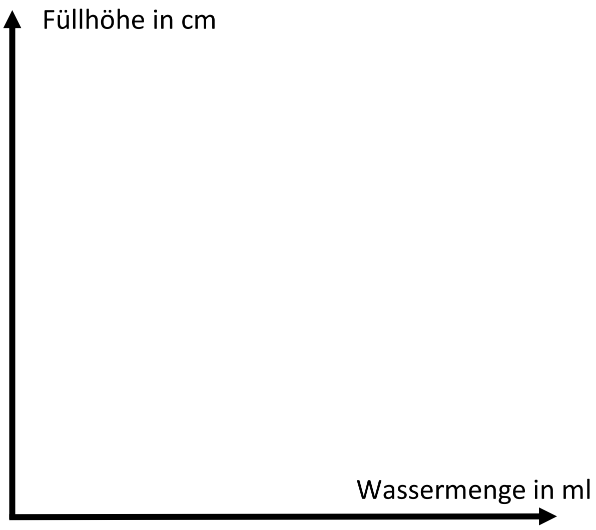
**1.** Scan den QR-Code. Sieh dir das Video an und bearbeite danach die Aufgaben des GeoGebra-Arbeitsblattes.

**2.** Ordne den Gefäßen ihren passenden Füllgraphen zu. Du kannst dazu die GeoGebra-Seite aus Aufgabe 1 verwenden.

* **3.** Skizziere den Füllgraphen zum gegebenen Gefäß in das Koordinatensystem. Du brauchst keine exakten Werte.

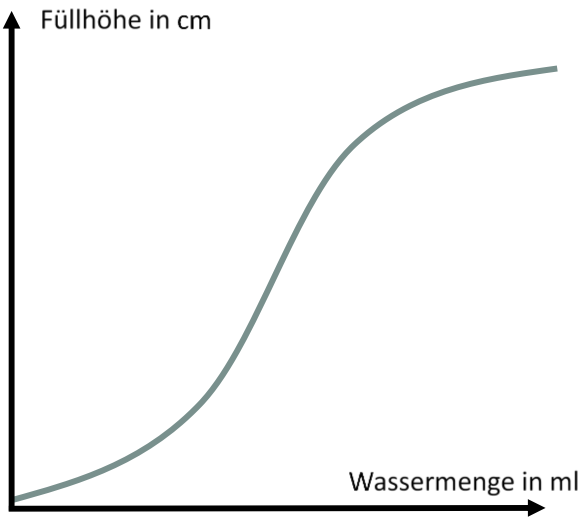
**Gefäß:**






** **4.** Wie könnte das Gefäß zu diesem Graphen aussehen? Skizziere ein mögliches Gefäß.

**Gefäß:**



## 400-Meter-Lauf

Zum Sportfest deiner Schule hat ein Wettrennen stattgefunden. Dabei gewinnt das Kind, das die 400-Meter-Marke zuerst erreicht. Hilf der Schulzeitung den Bericht fertig zu schreiben.

**1.** Scan den QR-Code. Sieh dir das Video an und bearbeite danach die Aufgaben des GeoGebra-Arbeitsblattes.

**2.** Ergänze den Zeitungsbericht. Nutze das GeoGebra-Arbeitsblatt.

**400-Meter-Lauf findet verdienten Sieger**

Den besten Start erwischte _________. Allerdings blieb er nach _____ Metern plötzlich stehen, weil ______________________________________________. Nach ____ Sekunden wurde er dadurch von Clara überholt. Die dritte Läuferin des Rennens war Betty. Sie lief zu Beginn ziemlich __________ los, wurde aber immer ______________.

____ Sekunden nach dem Start wurde Anton nun von Betty überholt. Es war ein spannendes Rennen für alle Zuschauer. Durch ein Überholmanöver ____ Meter vor der Ziellinie rannte __________ am Ende auf Platz 1. Für die 400 Meter brauchte sie nur ____ Sekunden. Auf Platz 2 landete __________ mit einer Zeit von ____ Sekunden.

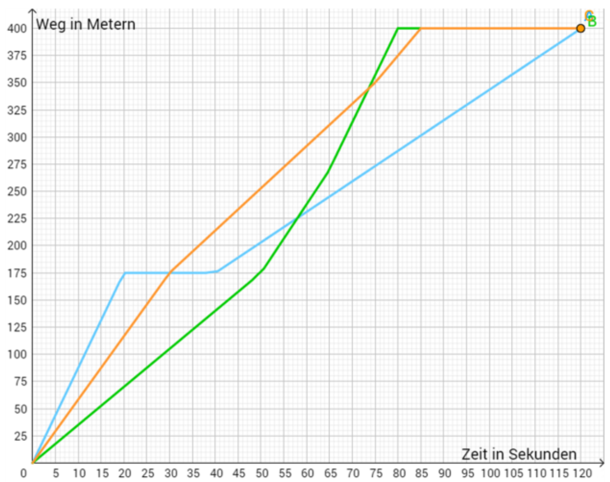
**Hier kannst du den Text online ausfüllen:**

**Easy**

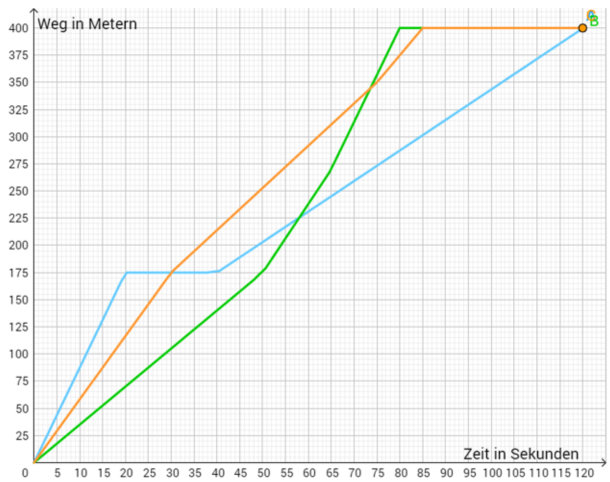
**Profi**

**3.** Angenommen du wärst bei dem Wettrennen mitgelaufen.
Skizziere deinen Graphen so in das Koordinatensystem, dass du...

a) * am Ende gewinnst.




b) ** unterwegs stolperst und Dritter wirst.



**Name:** ................................................ **Klasse:** ........................ **Datum:** ...............................

## Verschiedene Trinkgläser

Scan den QR-Code. Folge den Anweisungen des GeoGebra-Buchs.

**1.** Ergänze die Wertetabelle für das **5cm breite Trinkglas**.
Beschrifte dann die Multiplikationspfeile.

·2 ·3 ·4 ·5

| x | Wassermenge in ml | 20 | 40 | 60 | 80 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| y | Füllhöhe in mm | 40 | | | | |

· · · ·

**Gehe nach jeder Aufgabe zurück zum GeoGebra-Buch.**

**2.** Berechne den *Proportionalitätsfaktor m* für jedes Wertepaar aus Aufgabe 1.
Teile dazu die Füllhöhe durch die Wassermenge.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{y}{x} = \frac{\text{Füllhöhe in mm}}{\text{Wassermenge in ml}}$ | | | | | |

Eine proportionale Zuordnung erkenne ich daran: der *Proportionalitätsfaktor m* ist für alle Wertepaare ___________________________.

In unserem Beispiel ergibt sich für den Proportionalitätsfaktor folgende Zahl: ______

Das bedeutet: Wenn ich **1 ml** Wasser in das Trinkglas schütte, steigt die Füllhöhe um ______ **mm**.

**Name:** ................................................ **Klasse:** ......................... **Datum:** ..............................

## 3.

Deniz behauptet, dass er die Füllhöhen nun auch anders berechnen kann. Ergänze den Rechenweg.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Füllhöhe für 20 ml Wasser: | 2 | · | 20 | = | 40 | mm |
| Füllhöhe für 40 ml Wasser: | 2 | · | 40 | = | ____ | mm |
| Füllhöhe für 60 ml Wasser: | 2 | · | ___ | = | ____ | mm |
| Füllhöhe für 80 ml Wasser: | __ | · | ___ | = | ____ | mm |
| Füllhöhe für 100 ml Wasser: | __ | · | ___ | = | ____ | mm |

**Vergleiche die Ergebnisse mit denen aus Aufgabe 1.**

Kannst du nun auch die Füllhöhen für 200 ml und 300 ml Wasser berechnen?

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Füllhöhe für 200 ml Wasser: | __ | · | ___ | = | ____ | mm |
| Füllhöhe für 300 ml Wasser: | __ | · | ___ | = | ____ | mm |

Deniz erkennt nun, wie er die Füllhöhe für eine beliebige Wassermenge („x“) berechnen kann:

Füllhöhe für x ml Wasser: __ · ___

Füllhöhe für eine beliebige Wassermenge = ______________________________ · Wassermenge

## 4.

Betrachte nun das **20cm breite Trinkglas**. Löse die Aufgaben.

a) Ergänze die Wertetabelle.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **x** | **Wassermenge in ml** | **20** | **40** | **60** | **80** | **100** |
| **y** | **Füllhöhe in mm** | **10** | | | | |

b) Berechne den Proportionalitätsfaktor.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{y}{x} = \frac{\text{Füllhöhe in mm}}{\text{Wassermenge in ml}}$ | | | | | |

c) Berechne die Füllhöhen für 200 ml, 300 ml und x ml Wasser wie in Aufgabe 3.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Füllhöhe für 200 ml Wasser: | __ | · | ___ | = | ____ | mm |
| Füllhöhe für 300 ml Wasser: | __ | · | ___ | = | ____ | mm |
| Füllhöhe für x ml Wasser: | __ | · | ___ | | | |

Jede proportionale Zuordnung hat die Gleichung: **f(x) = m · x**

## Verschiedene Quadrate

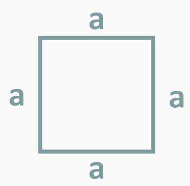
Wir wollen uns Quadrate mit verschiedenen Seitenlängen ansehen und den Umfang berechnen.

**1.** Scan den QR-Code. Bearbeite mithilfe des GeoGebra-Applets die Aufgaben.

a) Deniz hat vergessen, wie er den Umfang eines Quadrats berechnen kann. Hilf ihm.

Die Formel für den Umfang eines Quadrats lautet:

**u =** ________.




b) Nutze das Applet um den Umfang zu berechnen.

| | | +1 | +1 | +1 | + | + | + |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **a** | **Seitenlänge in cm** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** |
| **u** | **Umfang in cm** | | | | | | | |
| | | + | + | + | + | + | + |

c) Deniz schaut sich das Ganze noch einmal an. Ergänze die Lücken.

Jeder Seitenlänge eines Quadrats wird der zugehörige Umfang zugeordnet. Es geht also um die Zuordnung *„Seitenlänge eines Quadrats → Umfang“.* Wenn ich mir die Formel für den Umfang anschaue, stelle ich fest: diese Zuordnung ist ______________________. Den Proportionalitätsfaktor muss ich dabei gar nicht berechnen. Ich kann ihn einfach aus der Gleichung ablesen. Er beträgt: _____.

d) Beschrifte nun die Additionspfeile in der Tabelle.

e) Ergänze mithilfe der Pfeile die beiden Lücken.

Wenn man die Seitenlänge um ◯ cm erhöht, erhöht sich der Umfang um ◯ cm.

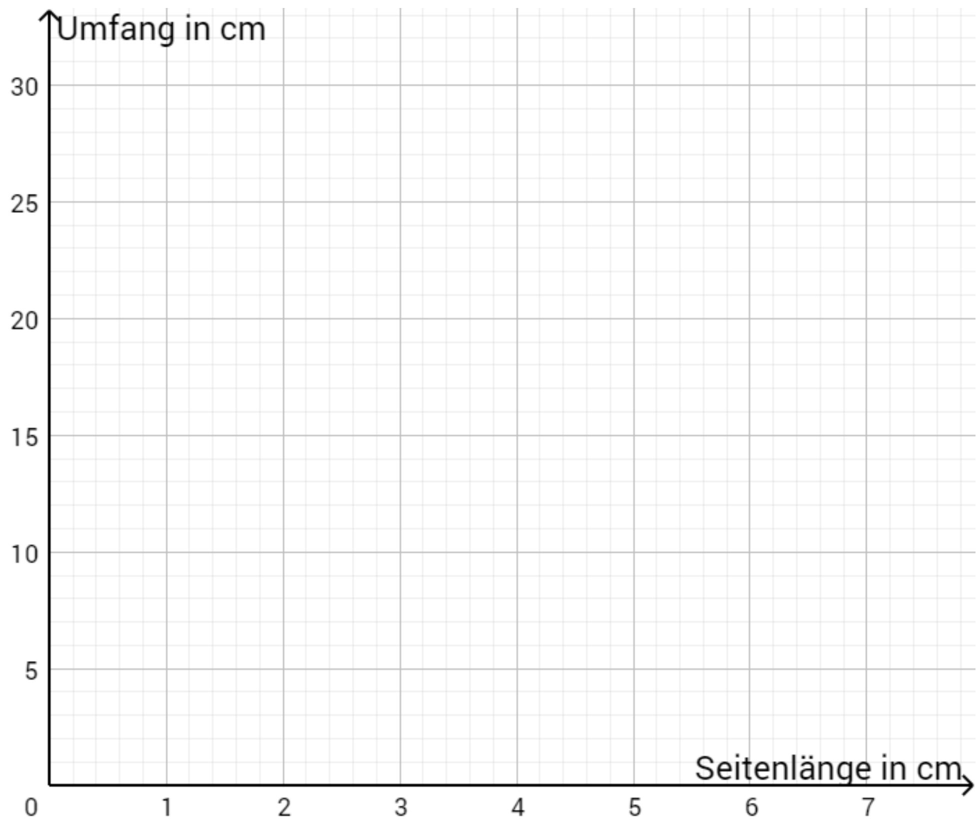
**Name:** ........................................................ **Klasse:** ........................... **Datum:** ................................

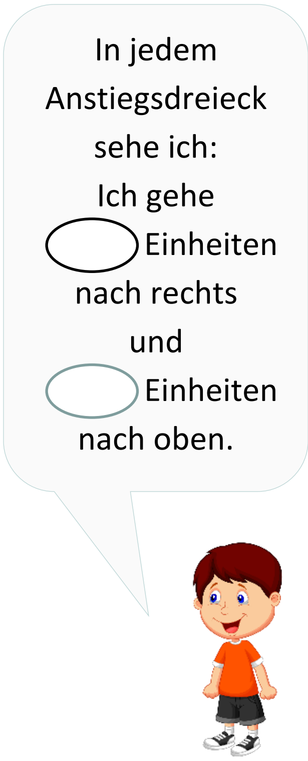
## 2.

Scan den QR-Code und sieh dir das Video an. Bearbeite danach die Aufgaben.

a) Stelle die Zuordnung im Koordinatensystem dar.

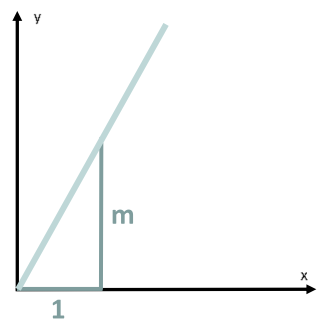
b) Zeichne mindestens 3 Anstiegsdreiecke (Steigungsdreiecke) ein und ergänze dann die Lücken in der Sprechblase.




## Der Anstieg m

Für eine proportionale Funktion mit der Gleichung $f(x) = m \cdot x$ gilt:
Wenn man x um **1** erhöht, dann erhöht sich der Funktionswert um den Proportionalitätsfaktor m.
Den Proportionalitätsfaktor m können wir über **Anstiegsdreiecke** (oder: Steigungsdreiecke) im Graphen erkennen.
Wir nennen m deshalb auch **Anstieg** (oder: Steigung) der Geraden.
Je größer m, desto steiler verläuft der Graph.



CvO Carl-von-Ossietzky-Schule (Gemeinschaftsschule)

Übung Anstiegsdreieck (Steigungsdreieck)
**Mathematik**

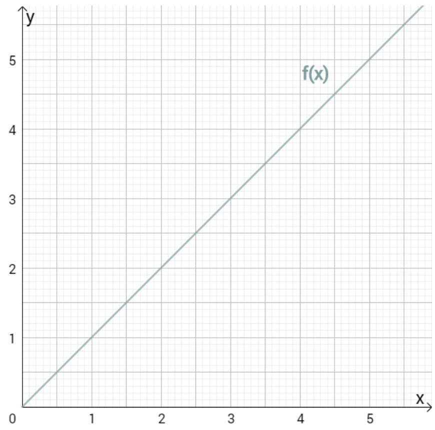
**Name:** ................................................ **Klasse:** ........................ **Datum:** ...............................

## Übung Anstiegsdreieck

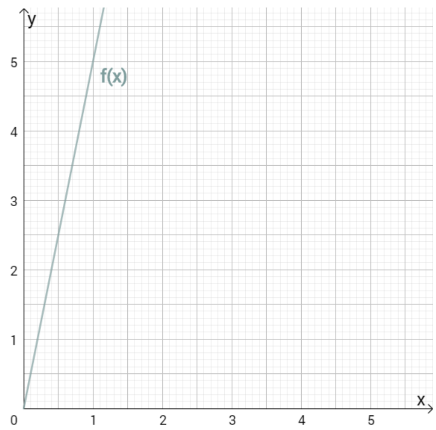
**1.** Scan den QR-Code. Ordne dem Graphen mithilfe des Anstiegsdreiecks die richtige Funktionsgleichung zu.

**2.** Scan den QR-Code und sieh dir das Video an.
Bestimme den *Anstieg m* mithilfe des Anstiegsdreiecks.

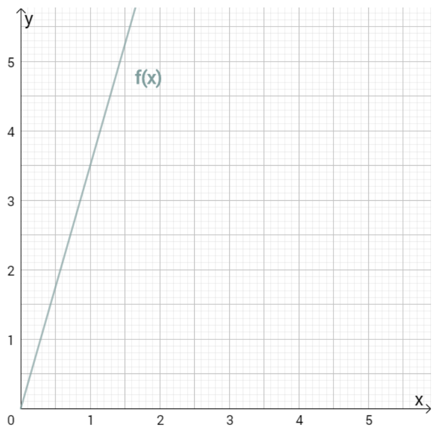
**3.** Zeichne jeweils ein geeignetes Anstiegsdreieck ein. Bestimme dann die Gleichung der Geraden.




f(x) = ...... · x



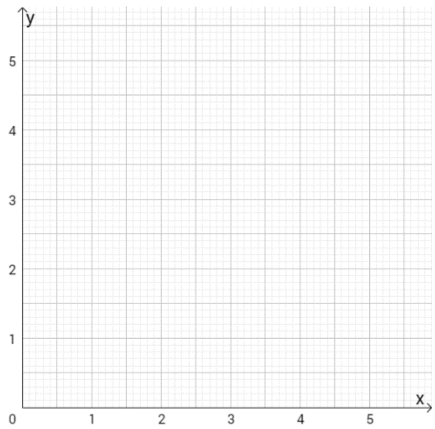

f(x) = ...... · x



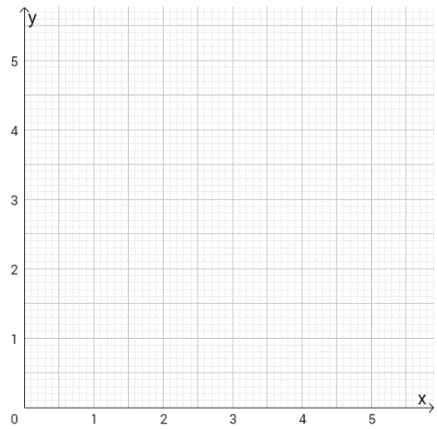

f(x) = ...... · x

** **4.** Zeichne die Gerade zur proportionalen Funktion. Nutze jeweils ein geeignetes Anstiegsdreieck.

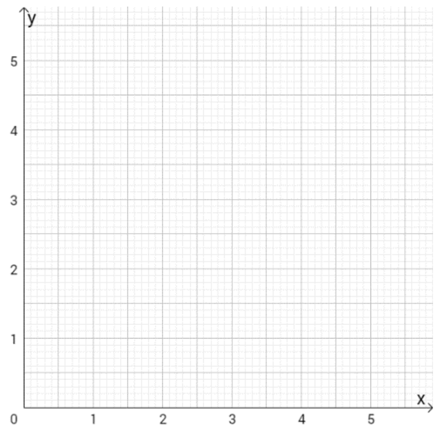
f(x) = 4 · x



f(x) = 2,5 · x



f(x) = 1,7 · x



## 100-Meter-Lauf

Dana und Emre haben sich zu einem Wettrennen verabredet. Es gewinnt das Kind, welches die 100-Meter-Marke zuerst erreicht.

### 1.

Scan den QR-Code und bearbeite die Aufgaben auf dem GeoGebra-Arbeitsblatt. Ergänze dann den zurückgelegten Weg mithilfe des Applets.

**Emre:**

| x | Zeit in s | 0 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | Weg in m | | | | | | |

**Dana:**

| x | Zeit in s | 0 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | Weg in m | | | | | | |

### 2.

Berechne den Anstieg m. Stelle dann die Funktionsgleichung der beiden proportionalen Zuordnungen auf.

**Emre**

*Der Anstieg m wird berechnet:*

$m = \frac{y}{x} = \frac{Weg}{Zeit}$ ..................................................

..................................................

..................................................

*Die Funktionsgleichung lautet:*

**g(x) =** ..................

Es reicht, wenn du *m* jeweils für ein Wertepaar berechnest. Beachte, dass du *nicht durch 0 teilen* darfst!

**Dana**

*Der Anstieg m wird berechnet:*

$m = \frac{y}{x} = \frac{Weg}{Zeit}$ ..................................................

..................................................

..................................................

*Die Funktionsgleichung lautet:*

**f(x) =** ..................

### 3.

Scan den QR-Code und bearbeite die Aufgaben.

CvO Carl-von-Ossietzky-Schule (Gemeinschaftsschule)

Einführung Lineare Funktionen
**Mathematik**

**Name:** ................................................ **Klasse:** .......................... **Datum:** ...............................

## 4.

Du entscheidest, wie das Rennen ausgeht. Gib Dana einen Vorsprung deiner Wahl und bearbeite damit die Aufgaben. Nutze das Applet aus Aufgabe 3.

**Für das nächste Rennen gebe ich Dana _______ Meter Vorsprung.**

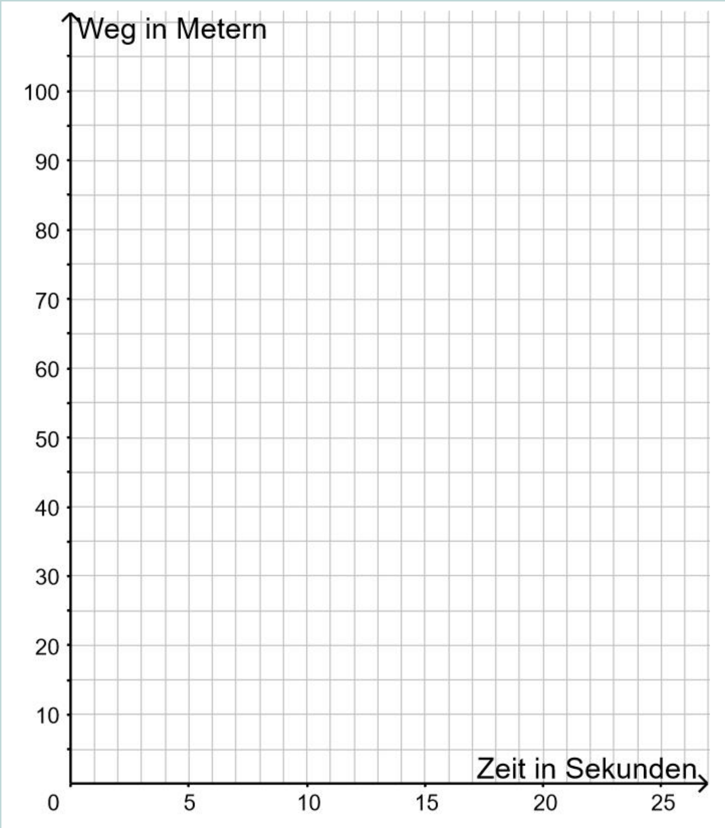
a) Wie geht das neue Rennen aus?

☐ Emre gewinnt ☐ Dana gewinnt ☐ Beide gewinnen

b) Fülle die neue Wertetabelle aus.

| | *ohne Vorsprung* | | *mit Vorsprung* |
|---|---|---|---|
| **Zeit in s** | **Weg in m** | | **Weg in m** |
| **0** | | + → | |
| **5** | | + → | |
| **10** | | + → | |
| **15** | | + → | |
| **20** | | + → | |
| **25** | | + → | |
| **x** | | + → | |

***Tipp**: Übernimm diese Werte aus Aufgabe 1.*




c) Wie hat sich der zurückgelegte Weg verändert? Ergänze die Additionspfeile zwischen den beiden Tabellenspalten.

d) Zeichne die Gerade von Dana ohne und die Gerade mit deinem Vorsprung in das Koordinatensystem ein.

e) Zeichne den Vorsprung als Pfeil in das Koordinatensystem ein.

## 5.

Sieh dir zum Abschluss dieses GeoGebra-Arbeitsblatt an, folge den Anweisungen und bearbeite die Aufgaben.

CvO Carl-von-Ossietzky-Schule (Gemeinschaftsschule)

Einführung Lineare Funktionen
**Mathematik**

**Name:** ................................................... **Klasse:** .......................... **Datum:** ...............................

## Taxifahrt

Das Taxiunternehmen „Taxi Flitzer“ in Berlin hat folgende Preise. Pro gefahrenen Kilometer berechnet Herr Flitzer 0,50 €. Hinzu kommt eine Grundgebühr von 3,00 € für die gesamte Fahrt.

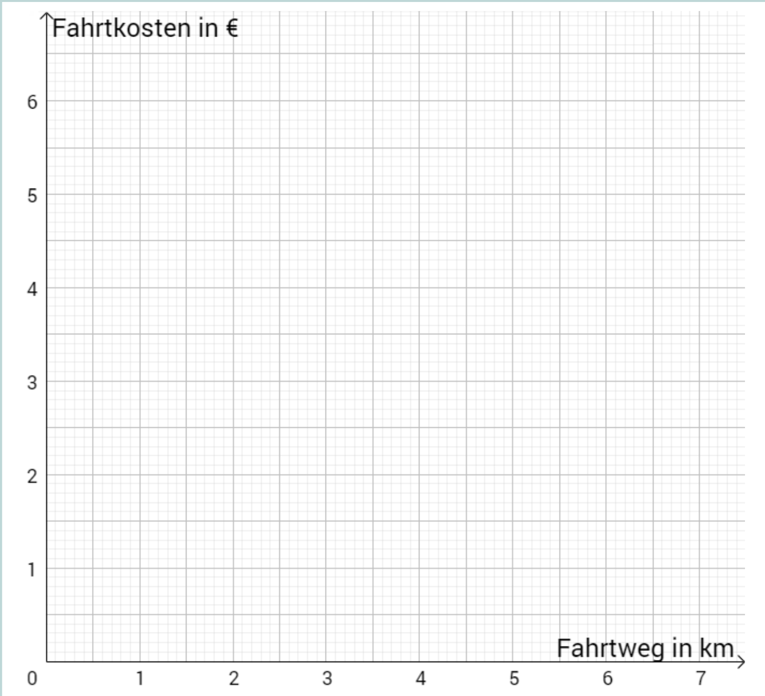
### 1.

Das Taxiunternehmen „Taxi Flitzer“ berechnet seinen Gästen pro gefahrenem Kilometer 0,50 €. Hinzu kommt eine Grundgebühr von 3,00 € pro Fahrt.

a) Berechne die Fahrtkosten.

| Fahrtweg in km | Fahrtkosten in € |
|---|---|
| **0** | |
| **1** | |
| **2** | |
| **3** | |
| **4** | |
| **5** | |
| **6** | |
| **7** | |

b) Zeichne die Wertepaare in das Koordinatensystem ein.




### 2.

Scan den QR-Code und folge den Anweisungen. Bearbeite dann die Aufgaben a) und b).

b) Zeichne den Verschiebungspfeil auf der y-Achse und ein Anstiegsdreieck in dein Koordinatensystem aus Aufgabe 1 ein.

a) Lies nun den Anstieg *m* und den y-Achsenabschnitt *n* deiner Geraden ab und gib die Funktionsgleichung an.

***Tipp***: Nutze dazu zwei verschiedene Farben!

**Anstieg m:** ______ **y-Achsenabschnitt n:** ______ **Funktionsgleichung: f(x) =** __________

### 3.

Scan den QR-Code und bearbeite die Aufgaben.

**Name:** .................................................... **Klasse:** .......................... **Datum:** ..............................

## Wir ziehen den Stöpsel

Erinnerst du dich an die Badewannen-Geschichte zu Beginn? Wir wollen uns den Teil der Geschichte anschauen, als der Stöpsel der Badewanne gezogen wird und das Wasser herausläuft.

### 1.

Eine 40cm hohe Badewanne ist bis zum Rand mit Wasser gefüllt. Frau Amiri zieht den Stöpsel. Pro Minute sinkt die Füllhöhe der Badewanne um 5cm.

a) Berechne die Füllhöhen und ergänze die Lücken.

+1 +1 +1 + + + + +

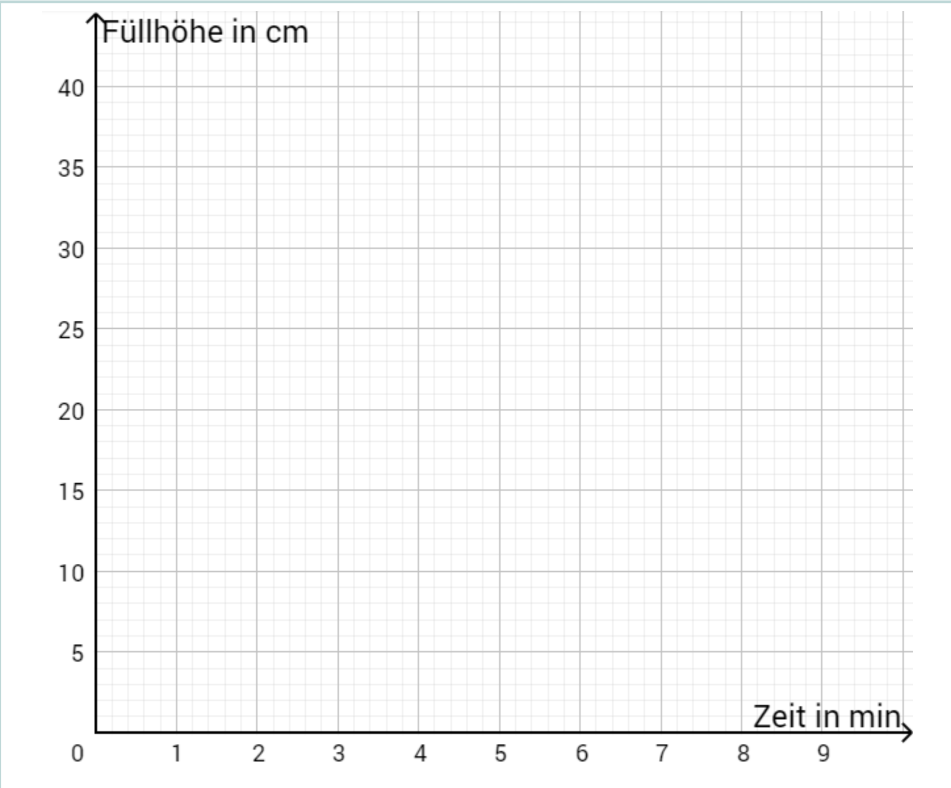
| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | **Zeit in min** | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** |
| y | **Füllhöhe in cm** | | | | | | | | | |

\- - - - - - - -

Nach ____ Minuten ist die Badewanne noch *halb voll*. Nach ____ Minuten ist sie komplett *leer*.

b) Beschrifte die Additions- und Subtraktionspfeile in der Tabelle.

c) Zeichne die Wertepaare in das Koordinatensystem ein und verbinde zu einer Geraden.




Der Graph im Koordinatensystem ist eine Gerade, deshalb handelt es sich auch bei dieser Zuordnung *„Zeit → Füllhöhe“* um eine

__________________

Funktion.

Wir haben eine Wertetabelle und den Graphen unserer linearen Funktion bestimmt. Wir wissen, dass wir eine lineare Funktion auch über eine Funktionsgleichung ausdrücken können.

## 2.

Scan den QR-Code. Bearbeite mithilfe des GeoGebra-Applets die Aufgaben.

a) Ergänze die Lücken.

Jede lineare Funktion besitzt eine **Funktionsgleichung** der Form f(x) = __________.
Um die Funktionsgleichung für die Zuordnung *„Zeit → Füllhöhe"* aufzustellen, müssen wir also den ________________ m und den ____________________ n aus unserem Graphen bestimmen.

b) Zeichne den Verschiebungspfeil auf der y-Achse und drei Anstiegsdreiecke in dein Koordinatensystem aus Aufgabe 1 ein.

c) Ergänze den Lückentext, um den Anstieg, den y-Achsenabschnitt und die Funktionsgleichung zu bestimmen.

***Tipp***: Nutze das GeoGebra-Applet!

1. **Schritt**: Zuerst bestimme ich den y-Achsenabschnitt ___. Ich schaue mir an, wo der Graph die ___________ schneidet. Dazu zeichne ich einen Pfeil ein. In unserem Beispiel geht der Pfeil um ____ Einheiten nach ______, also ist n = ____.
2. **Schritt**: Jetzt bestimmen wir den Anstieg ____. Ich zeichne hierfür ein Anstiegsdreieck ein. Dazu muss ich vom y-Achsenabschnitt um 1 nach rechts gehen. Um wieder auf die Gerade zu treffen, muss ich diesmal um ____ nach ________. Da ich nach unten gehe, ist mein Anstieg negativ. Ich schreibe ein _________ vor die Zahl, also m = ____.
3. **Schritt**: Die fertige Funktionsgleichung lautet damit also f(x) = ____________.

## 3.

Scan den QR-Code und sieh dir das Lernvideo und das Applet an.

## Selbstständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich, Luis Schlesier, die vorliegende Arbeit selbstständig und nur mit den angegebenen Hilfsmitteln angefertigt zu haben sowie alle Stellen, die dem Wortlaut oder dem Sinn nach anderen Werken entnommen sind, durch die Angabe der Quellen als Entlehnung kenntlich gemacht zu haben.

Dresden, den 06.05.2021 Unterschrift: L. Schlesier ________________________